研究論文 : 論文 ORIGINAL ARTICLES
Received February 6, 2004; Accepted December 24, 2004

ペンローズ・パターンを題材にしたパターン・デザイン研究 (I)

Pattern Design Research Using the Penrose Pattern (I)

● 藤田伸
有限会社リピートアート
Fujita Shin
Repeat Art LTD.

● Key words: Pattern Design, R.Penrose, M.C.Escher

要旨

本研究は、科学者ペンローズが発見したペンローズ・パターンを題材に、パターン・デザインのあらたな展開を模索したものである。本研究ではペンローズが提示した以外の組み合わせ条件に焦点をあてた。その際、まずは組み合わせ条件の全体像を把握し、分類化をこころみた。ペンローズ・パターンは“裏返しなし”が条件になっているが、本研究では“裏返しあり”の場合の組み合わせ条件も探ってみた。その結果、いくつかのユニークな組み合わせ条件を提示することができた。なかには“裏返しあり”でもペンローズ・パターンが成立する組み合わせ条件も含まれる。また前稿ではM.C.エッシャーが制作したエッシャー・パターンへの図形変換方法および作例を提示したが、本稿においても引き続きエッシャー・パターンへの図形変換をこころみた。本研究を通して、同テーマでさらなる研究が必要なことが確認できた。

Summary

This study strives to find new directions for pattern designs taking the Penrose patterns discovered by the scientist Roger Penrose as its theme. This research focuses on finding condition combinations other than those presented by Roger Penrose. This involves first of all trying to grasp an overall image for these condition combinations and then categorizing them. One condition of Penrose pattern is "no reversals" however our study also explored cases where "reversals are allowed". Results of this work allow proposing a number of unique condition combinations. Some of these include combinations allowing Penrose patterns even in a "reversals allowed" state. The previous paper also presented drawing models and methods for graphic conversion to Escher patterns that were created by the artist M.C. Escher. This current paper also follows up on this effort, attempting graphic conversions to Escher patterns. This work confirmed that even further research is needed on this same theme.

1. はじめに

本稿は平成13年度に発表した『ペンローズの非周期的パターンとエッシャー・パターンに関する考察』[注1]に続くものであり、本稿の研究目的は前稿で得た考察をさらに深めていくことにある。

前稿では、イギリスの数理物理学者ロジャー・ペンローズが提示した非周期的パターン（以下ペンローズ・パターンと称する）を題材にとりあげた。このペンローズ・パターンでもちいられる図形は、内角が36度と144度のひし形と、内角が72度と108度のひし形である（図1）。この2種のひし形はさまざまな組み合わせができるが、ペンローズはひし形に図2のベクトル表記による組み合わせ条件をつけた（以下ペンローズ・ルールと称する）。この条件をもとに組み合わせていくと、数学で定義されるところの周期性をもたない（平行移動に関する対称性がみとめられない）非周期的パターンができあがる。

前稿では、その組み合わせ条件のアイデアに着目し、他の組み合わせ条件を探ってみた。その結果、必ずしも“非周期的のみ”を限定させなくても、デザイン的に魅力ある他の組み合わせ条件の存在を一部確認することができた。

同時に、次なる問題も生じてきた。ひとつは、ペンローズがしめした条件以外に、いったいどれだけの組み合わせ条件のバリエーションがあるのだろうか、という素朴な疑問である。もうひとつは、未だみたこともないユニークな組み合わせが、この先無数にあるかもしれないという期待である。

そこで本稿ではペンローズが提示した2種のひし形に対して、その組み合わせ条件の解明をこころみることにした。

デザインの立場からパターンをさぐる際、数学者たちの“非周期的にのみ”というこだわりは十分に魅力的ながらも絶対条件とはならない。デザインの領域では、「美しい、楽しい、あたらしい」などの感性基準にくわえてデザインとして適用させやすい物性基準を満たす条件をさぐるのが課題であり、現象の論理化や法則化に目的があるわけではない。だがデザインとしてみても興味深く、かつ科学者たちが求める要求を満たすものがあれば、さらに申し分ないことであろう。ペンローズ・パターンが、それらを同時に満たす希有な例であることはいうまでもない。ペンローズは「美しいアイディアは醜いアイディアに比べて、

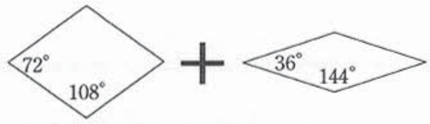


図1　ペンローズパターンのひし形

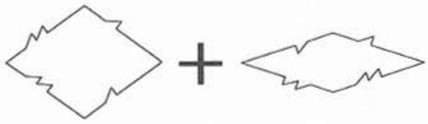


図2　ペンローズパターンの組み合わせ条件

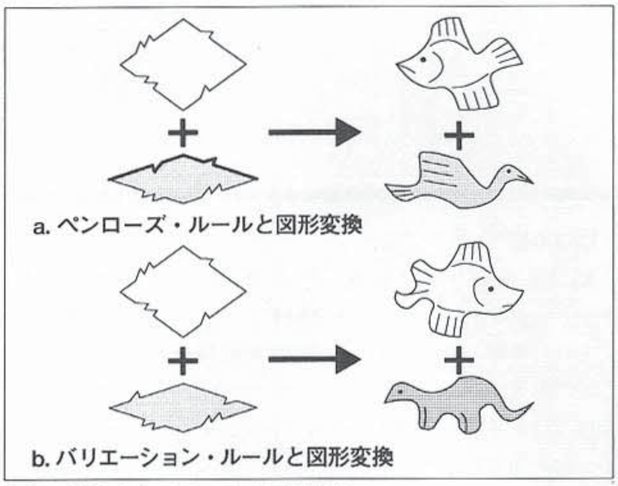


図3　組み合わせルールと図形変換

正しいアイディアであるチャンスははるかに大きい」と述べている[注2]。これは、そのままデザインの世界にもあてはめられる言葉として真摯に受けとめていきたい。

さらに前稿では、オランダのアーティストM.C.エッシャーがこころみた鳥や魚などのかたちで隙間なく埋めつくされたパターン（以下エッシャー・パターンと称する）も題材にとりあげた。そして前稿ではエッシャーがこころみた数々のパターンを、今後も継承すべきデザイン・パターン課題として捉え、誰もがエッシャー・パターンに変換できる方法および作例を提示した。本稿においても引き続き、できる限りエッシャー・パターンへの変換をこころみることにする。

2．組み合わせバリエーション
（2種のベクトル表記、裏返しなしの場合）

ペンローズが提示した組み合わせには、2種のベクトル表記が用いられており裏返しなしという条件がつく。

この2種のベクトルというのは、エッシャー・パターンへの変換をこころみる際、成形にあたり2種の線が使用できることを意味する。それは前稿で提示した図3-aのペンローズ・ルールと、それをもとに変換した魚と鳥の絵をみればあきらかである。前稿では図3-bという組み合わせのバリエーションも提示した。図3-aと図3-bの違いは太線で表示したベクトルの位置のみである。ただそれだけの違いでも、エッシャー・パターンへの変換をこころみる際の成形におよぼす影響は大きい。図3-aでは変換しやすいかたちとして魚と鳥が創出されたが、図3-bでは、鳥の変わりに動物のかたちが得られた。

組み合わせを限定させるベクトル表記を眺めているだけでは、

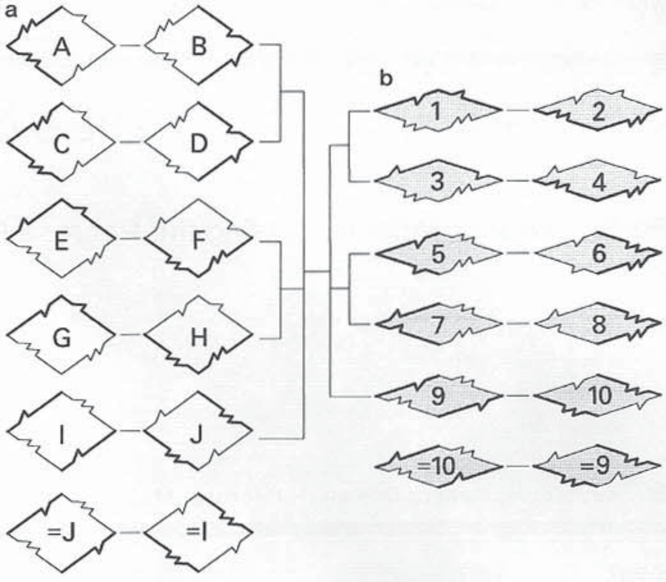


図4　ベクトル表示のバリエーション

表1　組み合わせ結果　（×＝しきつめ不可）

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	PP	P1	P2·3	PP	×	×	P2	×	×	×
B	P2·3	PP	PP	P1	P2	×	×	×	×	×
C	P1	PP	PP	P2·3	×	×	×	P2	×	×
D	PP	P2·3	P1	PP	×	P2	×	×	×	×
E	×	×	×	P1	×	×	×	×	×	×
F	×	×	P1	×	×	×	×	×	×	×
G	×	P1	×	×	×	×	×	×	×	×
H	P1	×	×	×	×	×	×	×	×	×
I	×	×	×	×	×	×	×	×	P4	P4
J	×	×	×	×	×	×	×	×	P4	P4

予想がつかない図形変換の世界があるということを、ここであらためて確認しておきたい。

さて、前稿では図3-a→図3-bとベクトル位置を変えるにとどまったが、本稿では、同じ条件でさらにバリエーションをさぐってみた。その結果が図4である。この際の条件とは、①2種のベクトル表記を用いて、②裏返しなしで、さらに③ベクトルの凹凸がそれぞれペアで存在すること（③を満たしていないと組合わせが成立しない）である。

図4-aにおいて、回転させたり裏返しをして重複するものを除いた結果、得られたA～Jの10種のバリエーションを樹系図的にしめす（ペンローズ・ルールをもとにベクトル位置を変えた箇所を太線で表示した）。

同様に鋭角36度のひし形においても、ペンローズがしめしたベクトル表記をもとに得られた1～10のバリエーションを樹系図的にしめす（図4-b）。A～Jと1～10の組み合わせは100通りになる。

図4のなかでペンローズ・ルールはAと1、図3-bのバリエーション・ルールはAと3の組み合わせとなる。つまり前稿においては、100通り考えられる組み合わせのなかで2通りの組み合わせにしか触れていなかったことになる。そこで他の98通りの組み合わせを試した結果、表1を得た。

表1で、しきつめによる組み合わせ不可を×印およびグレー

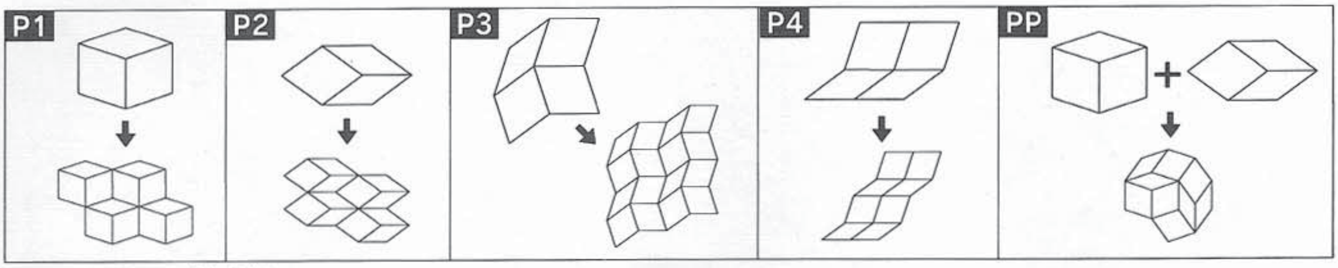
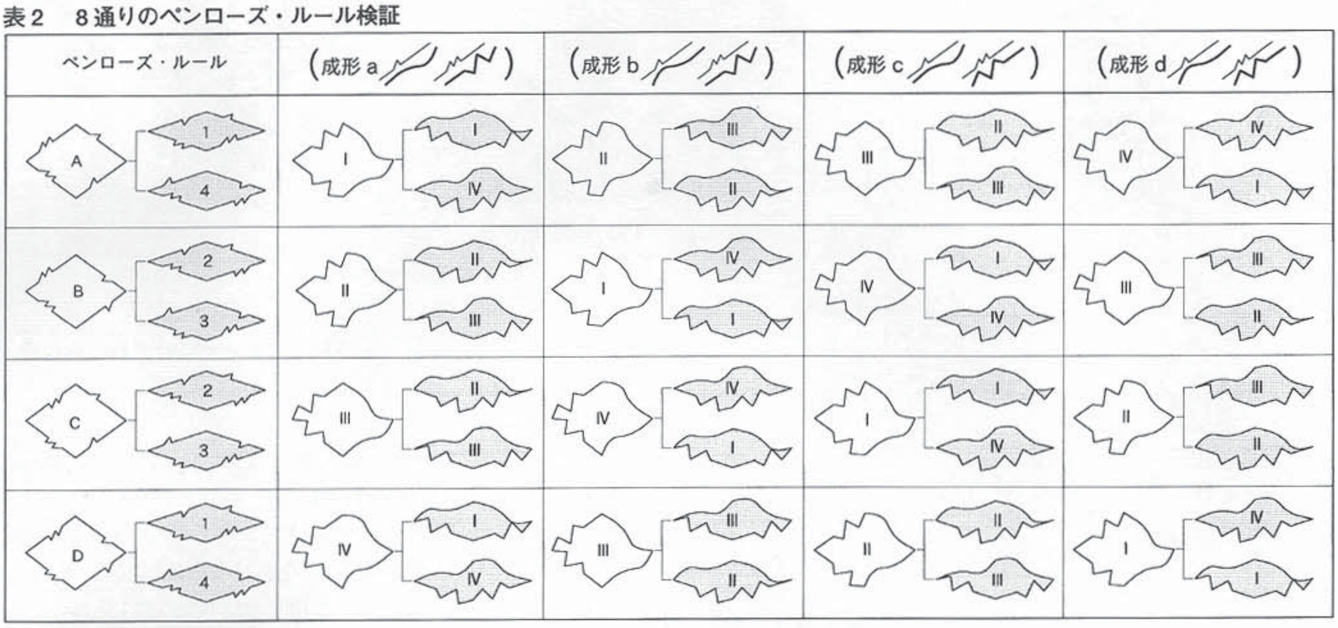


図5　組み合わせ基本分類

表2　8通りのペンローズ・ルール検証



で表示した。残りが、何かしらのパターンで組み合わせ可能となる。表1をひもとくにあたり本稿ではPI〜P4およびPP（ペンローズ・パターン）という分類をこころみた（図5)。

辺の長さが共通で、角度の異なる2種のひし形の組み合わせを考えるとしたら、通常、図5のPI〜P4の組み合わせが思い浮かぶ。そして結果判断からもPI〜P4を基本組み合わせとする分類法は都合がいいことがわかり、本稿ではこれを採択した。さらにペンローズ・パターンがおさまる項目としてPPという分類を設けた。基本組み合わせとしては、通常は思いつかない。ペンローズならではの第5の組み合わせともいえる。

3. 表記上の注意点

表1をみるとP1、PPの組み合わせが8通りでてくる。またP2、P2,3、P4の組み合わせも、それぞれ4通りでてくる。まずはこの問題を考えてみたい。

表1ではA-1、A-4、B-2、B-3、C-2、C-3、D-1、D-4の組み合わせがペンローズ・パターンとなる。このうちペンローズが提示したのはA-1のみである。その他にペンローズ・ルールが7通りもあるのは、いったいどういうことなのか。これを具体的にさぐったのが表2である。

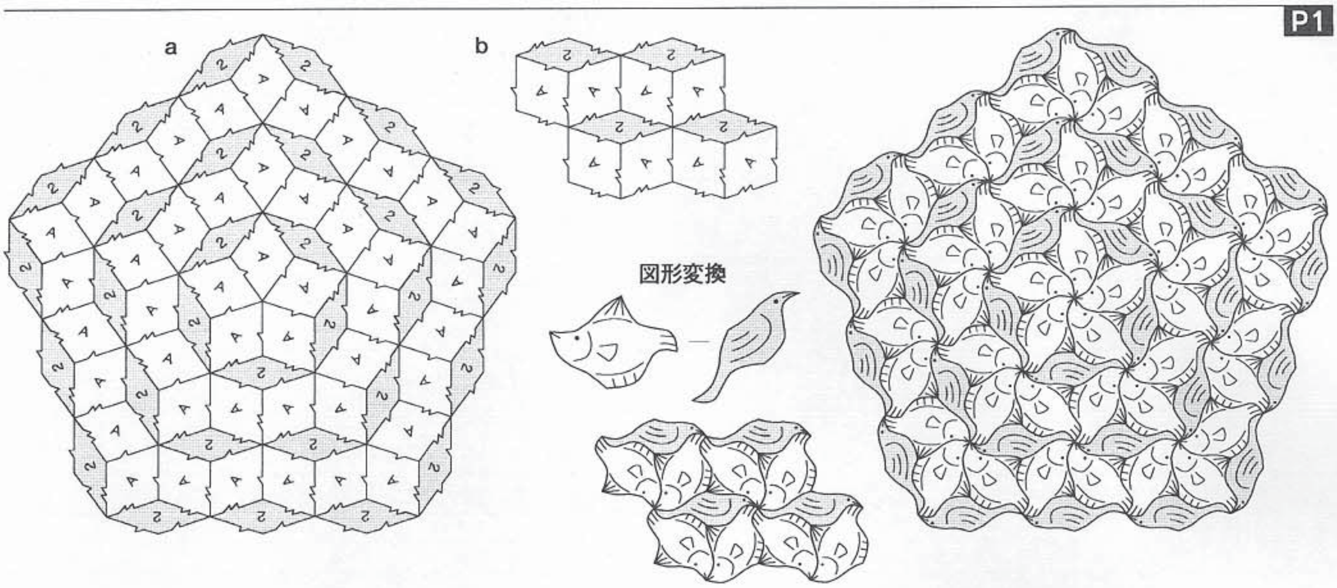
もしもペンローズ・ルールが複数あるとしたら、それをもとにエッシャー・のパターンに変換させる場合、都合がいい。なぜならば2種の線だけでかたちを作るのは難しい課題であり、ルールが多ければ多いほど納得いくかたちを得やすいからである。当初そのように考え、それぞれのペンローズ・ルールをもとに図形変換をこころみた結果、なぜか似たようなかたちが複数でてきて困惑した。

そこで問題を整理するために、同じ自由曲線をもとに複数のかたちを作って確かめた（表2における成形a〜dの太線表示)。成形aの2本の自由曲線を、それぞれを180度ずつ回転させて、同じペアがあらわれないようにしたのが成形b〜dである。そして、それぞれを8通りあるペンローズ・ルールのベクトル表記に対応させて、できあがったかたちを表2に列挙した。

表2において、それぞれ重複したかたちがあらわれる。そこで同じかたちを仕分けられるよう、図中にI〜IVの識別番号をつけた。すると、どの横一列をとっても順不同ながら必ずI〜IVが出揃うことが確認できた。つまり8通りのペンローズ・ルールは、どれも同じ移動操作をしめしていたことがわかった。成形a〜dの違いは、たまたま、はじめに描いた線の違いだけとも解釈できることから、いずれかの横一列をもって代表させて構わないのである。

他に表1で、P1が8通り、P2、P2,3、P4の組み合わせが4通りでてくるが、同じように、どれかひとつに代表させても構わないことを確認した。

前稿P.35、図21においても指摘したことだが、ベクトル表記による組み合わせ条件のアイデアには、このように同じ結果をもたらすにもかかわらず、異なる表記が複数存在するという問題点がある。エッシャー・パターンへの図形変換をこころみる際、ベクトル表記は手がかりとしてとても有効であるだけに、このベクトル表記特有の問題点には注意していきたい。



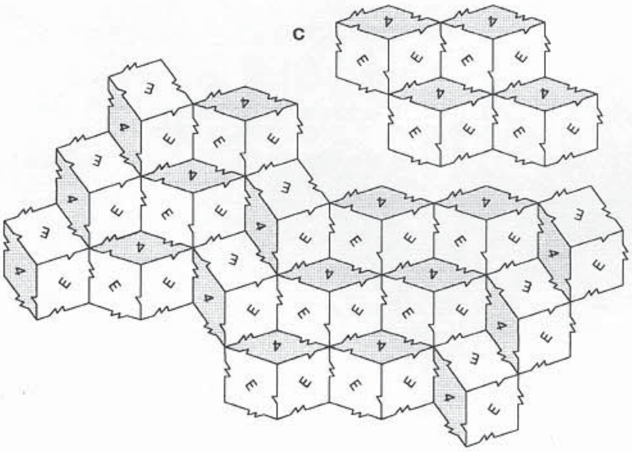


図6　P1の組み合わせ

4. 組み合わせの特徴
（2種のベクトル表記、裏返しなしの場合）

2種のベクトル表記、裏返しなしというペンローズ・ルールと同じ条件で、ベクトル位置を変えた組み合わせのバリエーションを確かめた結果、それぞれ特徴ある組み合わせがあらわれた。以下、特徴をまとめておく。

4.1. P1 の組み合わせ

表1においてP1の組み合わせができるのはA-2、B-4、C-1、D-3、E-4、F-3、G-2、H-1である。このなかでA-2、B-4、C-1、D-3は図6-aのように回転対称による組み合わせが可能となる。その場合、鋭角が36度のひし形を中心にもってくることはできない。もちろん図6-bのように単調に組み合わせることもできるが図6-aとbを混在させて組み合わせることはできない。P1の単調な組み合わせは、図6-cのように変化をつけることができる。以下、エッシャー・パターンに図形変換させた作例もあわせて載せておく。

4.2. P2 の組み合わせ

次に、表1においてP2の組み合わせができるのはA-3、A-7、B-1、B-5、C-4、C-8、D-2、D-6である。図7-aのように単純に組み合わせていくこともできるが、図7-b,cのように回転対称による組み合わが可能になる。図7-aとbとcはいずれも混在させて組み合わせることはできない。

4.3. P2·3 の組み合わせ

P2の組み合わせのなかでA-3、B-1、C-4、D-2は、P3の組み合わせも同時に可能となる（図8-b）。そして図8-cのように、組み合わせを混在させることができる。そして図8-aとbの混在ばかりではなく、予想外の組み合わせも可能になる。図8-c以外の組み合わせバリエーションは、前稿P.36～37にペンローズ・パターンDとして提示してある。

パターン・デザインとしての可能性を考える際、このタイプの組み合わせは興味深い。表1をみるとわかるように、このタイプだけがP2とP3の組み合わせが同時にできる。たとえばP1·2、P1·3、P1·4などがあってもよさそうなところ、P2·3以外に同時にできるものはみあたらない。このタイプの組み合わせが前稿を書くきっかけになったが、偶然にも稀少なタイプにめぐり会っていたことがわかった。

4.4. P4 の組み合わせ

表1においてP4の組み合わせができるのはI-9、I-10、J-9、J-10である。図9-aをみるとわかるように単調な組み合わせとなる。しかし図8-bと同様、単調な組み合わせに変化をつけることができる（図9-b）。

4.5. PP の組み合わせ

ペンローズ・パターン（図10）に関しては前稿P.30～31で詳しく述べてあるので、本稿では次の点を指摘しておきたい。

P2·3においてはP2とP3の組み合わせが混在可能なためユニークな組み合わせができた。同様にペンローズ・パターンも、P1とP2の合体で構成されているからユニークな組み合わせができた。とするならば、今後ユニークな組み合わせを探る際、P1～4のような基本的な組み合わせが混在あるいは合体可能か否かが重要な手がかりになるかもしれない。

以上、同じ組み合わせのなかでI-9、I-10、J-9、J-10などと複数でてくる場合は、いずれかひとつに代表させて構わない。先に述べたとおり、ベクトル表記は異なっても得られる結果は同じだからである。

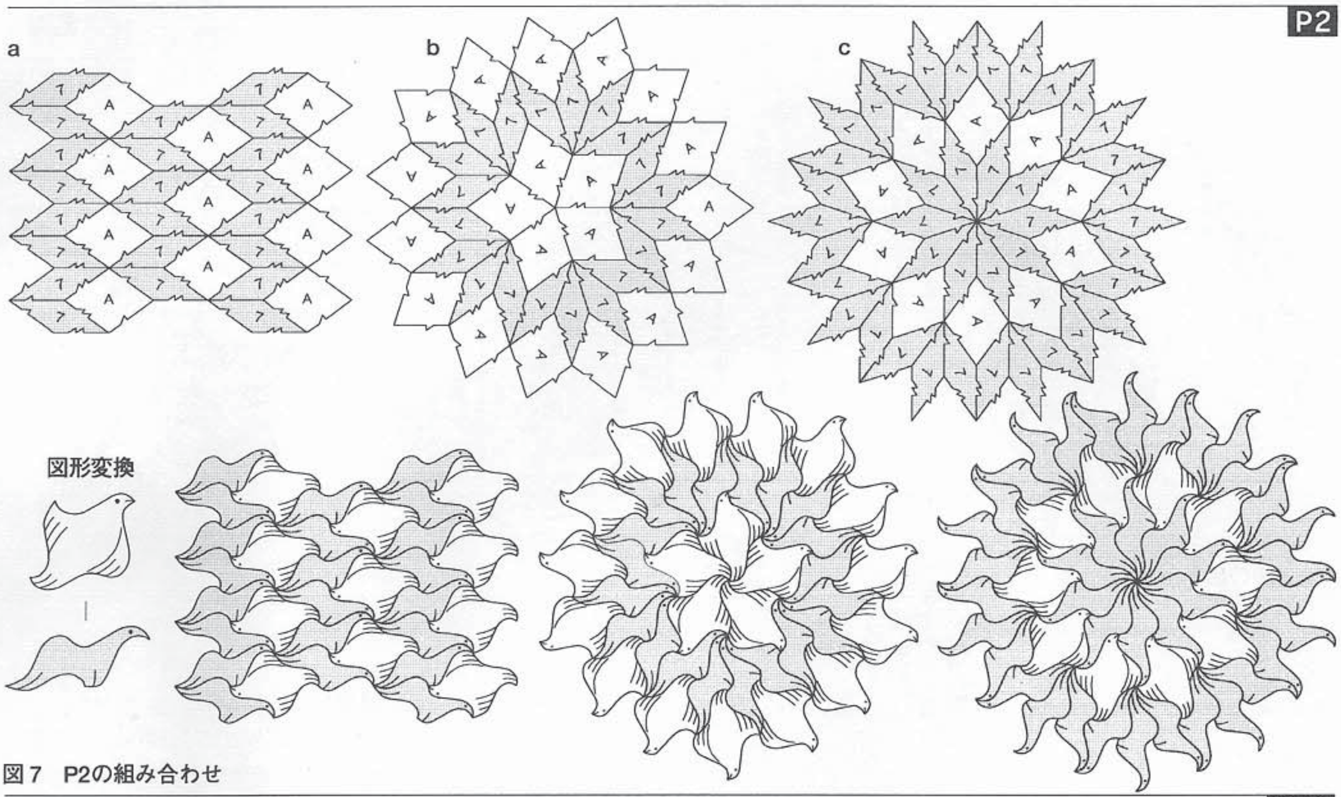


図7　P2の組み合わせ

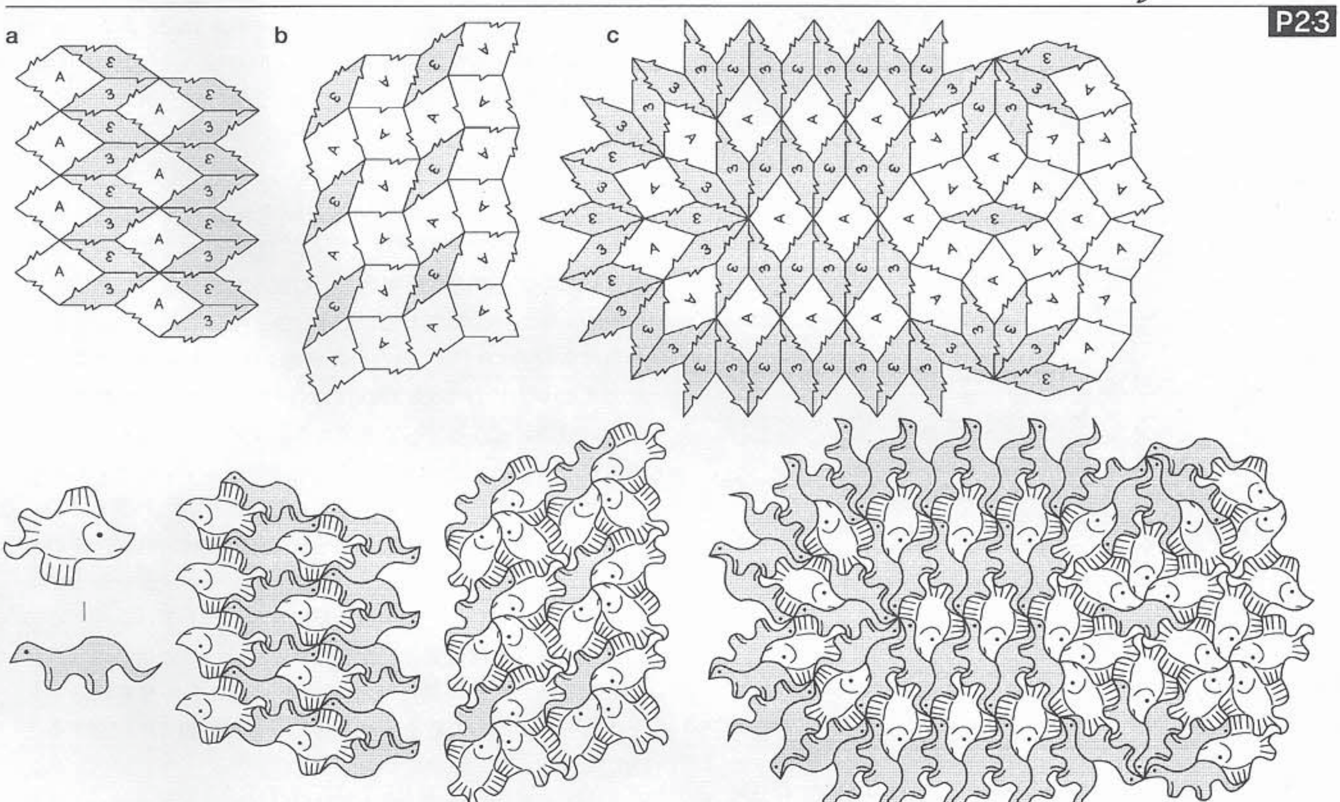


図8　P2·3の組み合わせ

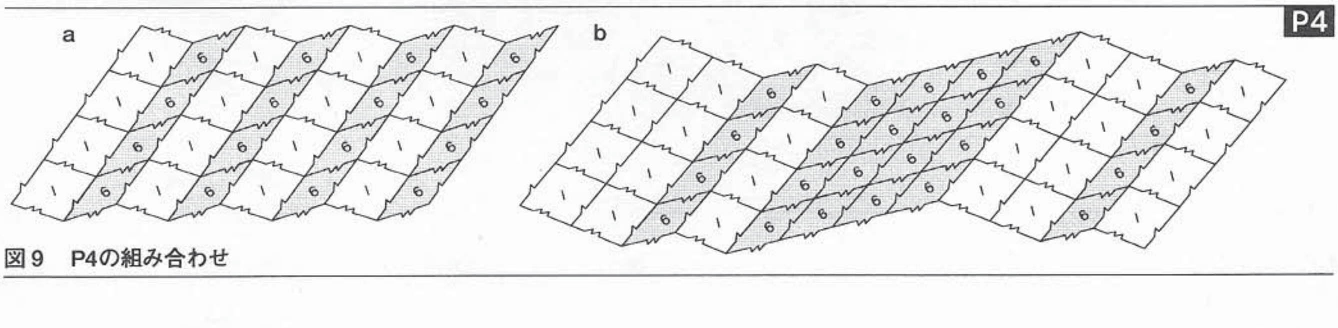


図9　P4の組み合わせ

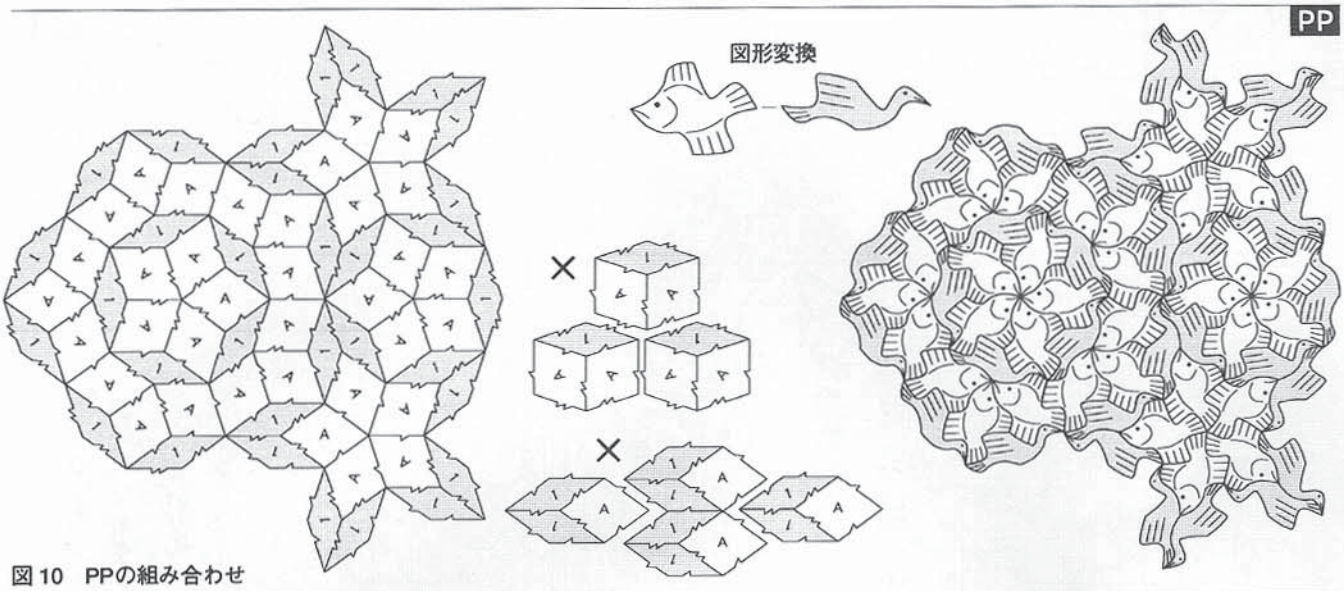


図10　PPの組み合わせ

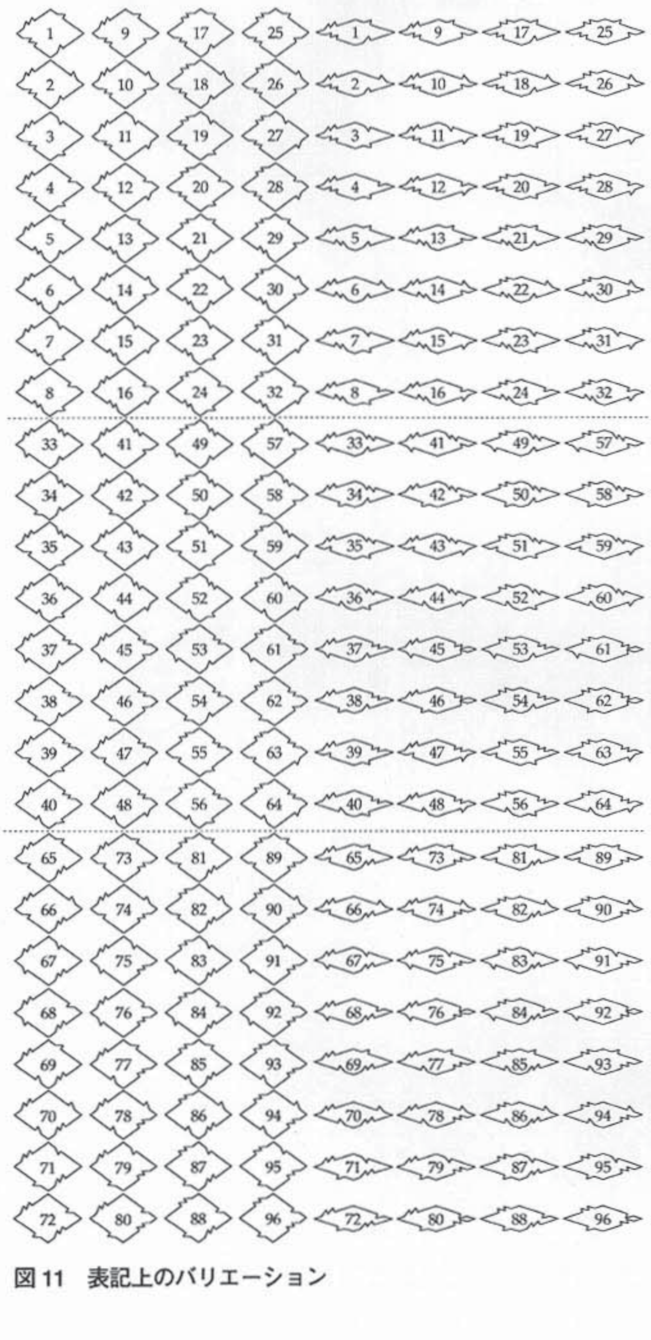


図11　表記上のバリエーション

5. 組み合わせのバリエーション
（2種のベクトル表記、裏返しありの場合）

ペンローズ・パターンを提示するにあたりペンローズは2種のひし形に、2種のベクトル表記、裏返しなしという条件をつけた。この2種のひし形で、2種のベクトル表記、裏返しなしという条件のうちの“裏返しなし”を取り払ったらどういう組み合わせが登場してくるのか。以下、2種のベクトル表記で裏返しありの場合を考えてみたい。

ベクトル表記の組み合わせにおいて、条件がひとつ変わるだけで考えられる組み合わせの数は指数的に変化する。①2種のベクトル表記を用いて、②ベクトルの凹凸がペアで存在し、③裏返しありが条件となる場合、その組み合わせ数は指数的に増加する。そこで③に関して、2種のひし形における裏返しの辺の数に条件をつけて、組み合わせ数の絞り込みを考えてみた。たとえば双方のひし形の四辺において、裏返しが奇数どうし、あるいは偶数どうしでペアで裏返されていないと組み合わないのではなかろうかと考えた。しかし図12ような場合でも組み合わせが成立することから、まずは総当たり的に列挙してみた。その結果、ベクトル表記上、ひとつのひし形において96のバリエーションを得た（図11）。このバリエーションを得るプロセスは、続稿で詳しく述べることにする。ひし形は2種あるので総当たり的に検証するとなると96×96 = 9,216通りの組み合わせになる。これは仮に毎日10通りの組み合わせを検証したとすると、すべての数を検証し終わるまでに約3年間要することになる。

このような量に対して、まずは統計学的アプローチをこころみることにした。ランダムにピックアップした組み合わせ結果

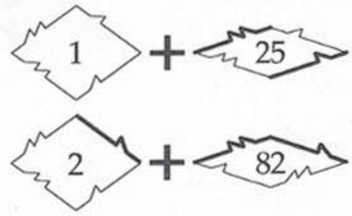


図12　裏返し箇所がイレギュラーな組み合わせ

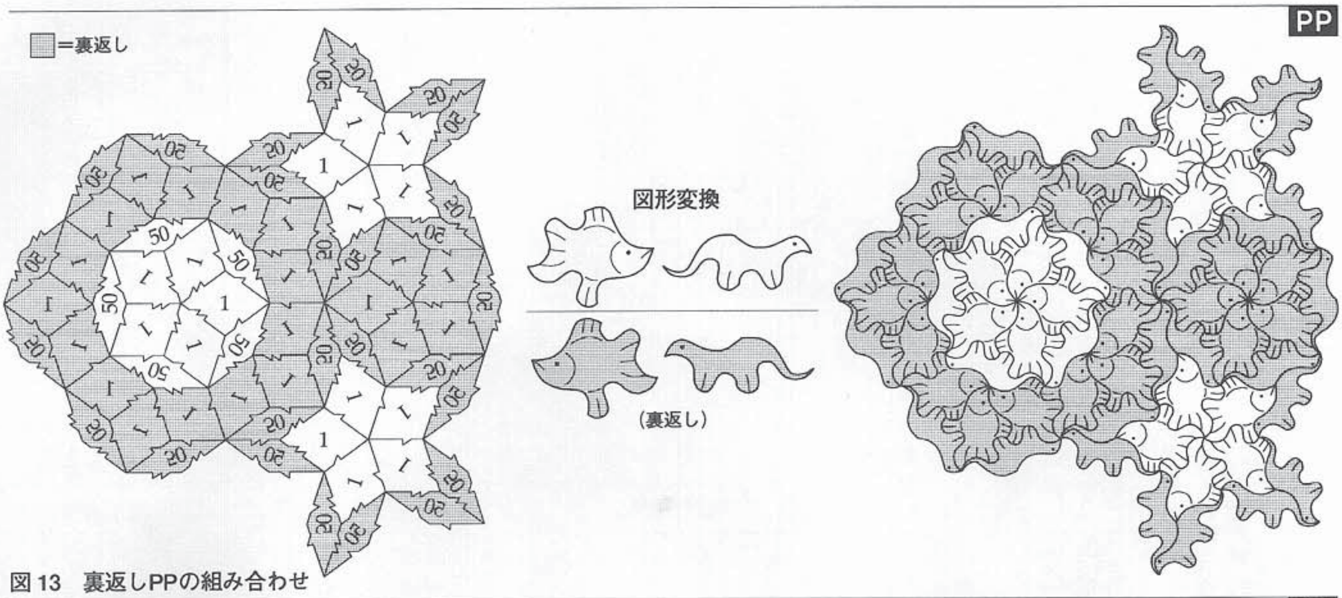


図 13　裏返しPPの組み合わせ

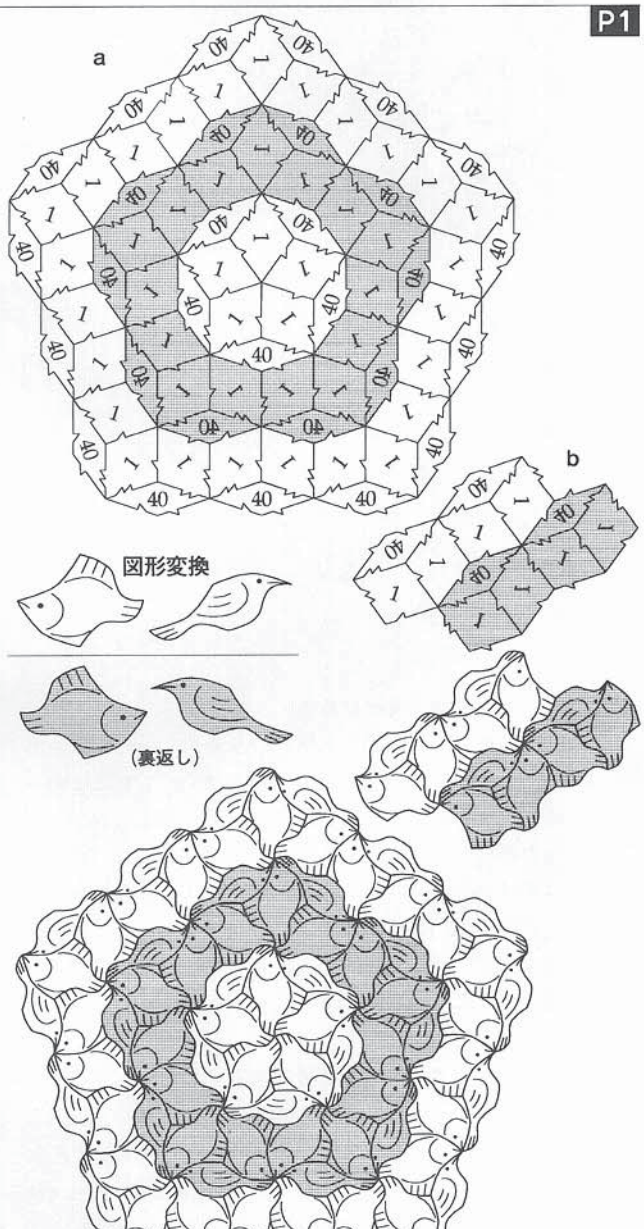


図 14. 裏返しP1の組み合わせ

にもとづいて全体像の推測をたてる手法である。この“2 種のベクトル表記、裏返しあり”おいて、可能性のありそうな組み合わせを見当をつけて総数の約 5 分の 1 の組み合わせをためしてみた。その結果、いくつかの共通した組み合わせを得ることができた。そして“2 種のベクトル表記、裏返しあり”の組み合わせは、続編であげる“1 種のベクトル表記、裏返しあり”にくらべて未知の組み合わせが出現する可能性が低いと推測した。しかし、限られた検証のなかでも興味深い組み合わせ結果を少なからず得ることができたので報告に至ることにした。以下、それぞれの組み合わせの特徴を述べておく。

5. 1. PP の組み合わせ（裏返しあり）

図 10 が“裏返しなし”の通常のペンローズ・パターンである。それに対して図 13 が“裏返しあり”のペンローズ・パターンとなる。図 13 のグレー表示部分が裏返し箇所である（以下図 18 まで同表示)。裏返し箇所は、エッシャー・パターに図形変換した魚と動物の向きをみるとよくわかる。ここにおいて“裏返しあり”でもペンローズ・パターンが成立することが確認できた。

ペンローズは組み合わせにあたり“裏返しなし”という条件を明示したが“裏返しあり”でもペンローズ・パターンが成立することから、おそらくペンローズは“裏返しあり”の組み合わせは確認していなかったに違いない。もっとも裏返しのあるなしに関わらず、当時、ペンローズ・パターンが提示する数理的な問題提起には影響をおよぼさなかったのであろう。それを思うと“裏返しあり”まで確かめる必要性がなかったとも考えられる。

5. 2. P1 の組み合わせ（裏返しあり）

P1 の組み合わせでは図 6 の“裏返し版”としての図 14 を得た。みるとわかるように“裏返しなし”と“裏返しあり”が交互に組合わさっていく。図 14 において鋭角が 36 度のひし形を回転対称の中心にして組み合わせていくことはできない。

“裏返しあり”の場合の P1 において、図 14-a のような回転対称による組み合わせができないもの、つまり図 14-b のみの組み合わせが複数存在することも、“裏返しなし”の場合と同様であった。

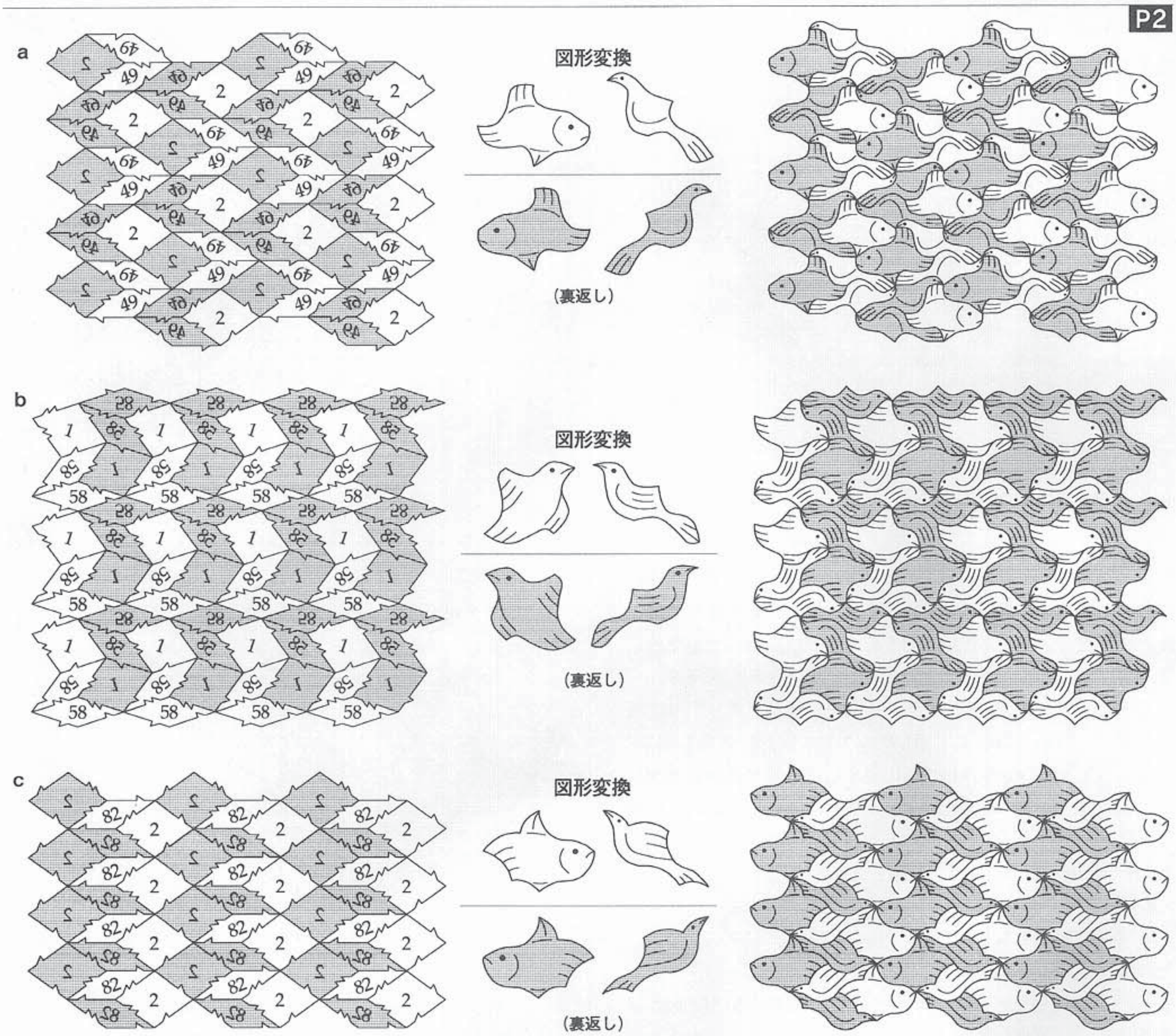


図 15　裏返しP2の組み合わせ-1

5.3. P2 の組み合わせ（裏返しあり）

2種のベクトル表記、裏返しありという条件で、興味深いあらたな組み合わせが登場してくるのはP2のタイプではなかろうか。2種のベクトル表記、裏返しなしの条件ではみることのできなかった組み合わせが可能となる。

たとえば図15-a,b,cのような組み合わせ結果を得ることができた。この図15-a,b,cは同じP2でありながら、図16のように回転対称による組み合わせはできない。だが、ここには図7-aのようなP2の単調さがみられない。表と裏が複雑にかみあった様相がみてとれる。

パズルゲームなどで、はじめに解答をみてしまうとプロセスの楽しみは半減してしまう。それと似たように、この図15-a,bに関しては、まさかこんな組み合わせができるとは予想できなかっただけに、結果を得るまでのプロセスを楽しむ（苦しむ）ことができた。他に組み合わせ不可としたなかに、予想もできなかった組み合わせが存在しているかもしれない。

図16はP2の組み合わせで、回転対称による組み合わせも可能となるタイプであり、同様の結果を得る組み合わせがいくつかあるなかでも裏返し箇所がユニークなものを選んで載せた。いわば図7の裏返し版といえる。図16-a,b,cは、そろぞれを混在させることができないところも図7と同様である。

5.4. P3 の組み合わせ（裏返しあり）

“裏返しなし”において、P3のみの組み合わせはできなかった。しかし“裏返しあり”ではP3のみの組み合わせを得ることができた。図17-aをみると図5のP3と若干異なるが、ここではP3の分類におさめた。

5.5. P23 の組み合わせ（裏返しあり）

“裏返しなし”において、特に柔軟な組み合わせを可能にさせたP2·3の裏返し版が図18である。だが鋭角36度のひし形のみがすべて裏返っているので、裏返る意味をもたない。“裏返しあり”のペンローズ・パターンにおいて図19のようなケースがありながらも図13を得たことを考えると、“裏返しあり”のP2·3においても他に有効な組み合わせルールが存在する可能性は否定できない。

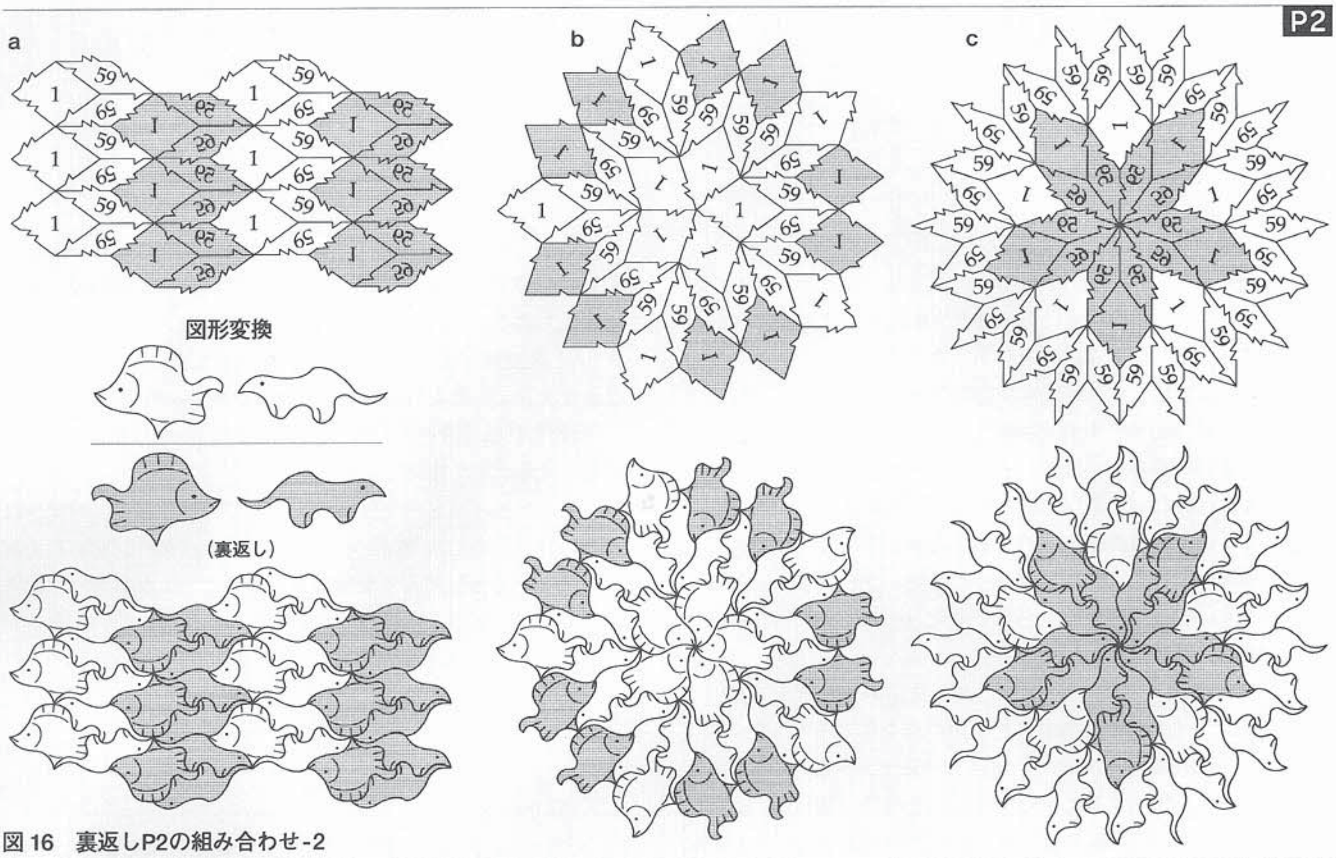


図 16　裏返しP2の組み合わせ-2

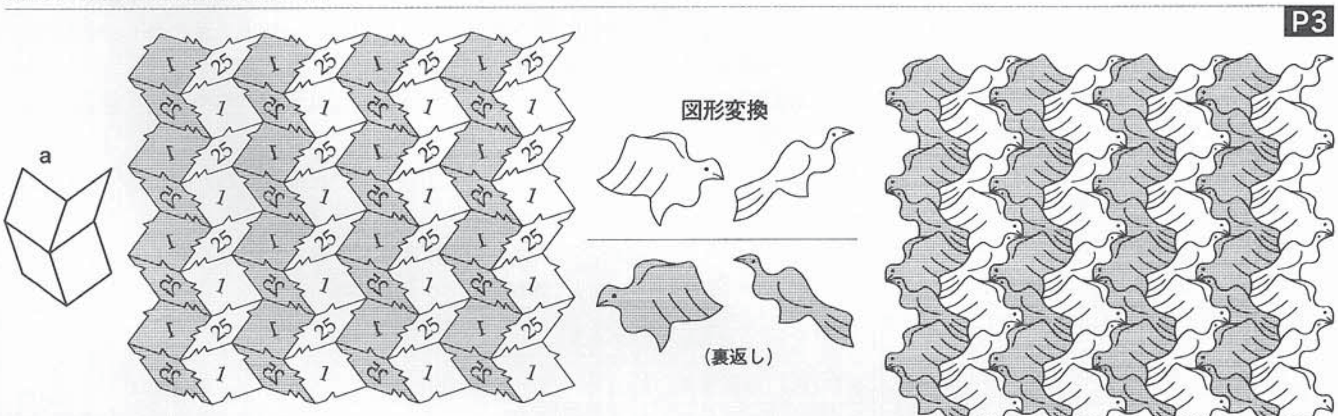


図 17　裏返しP3の組み合わせ

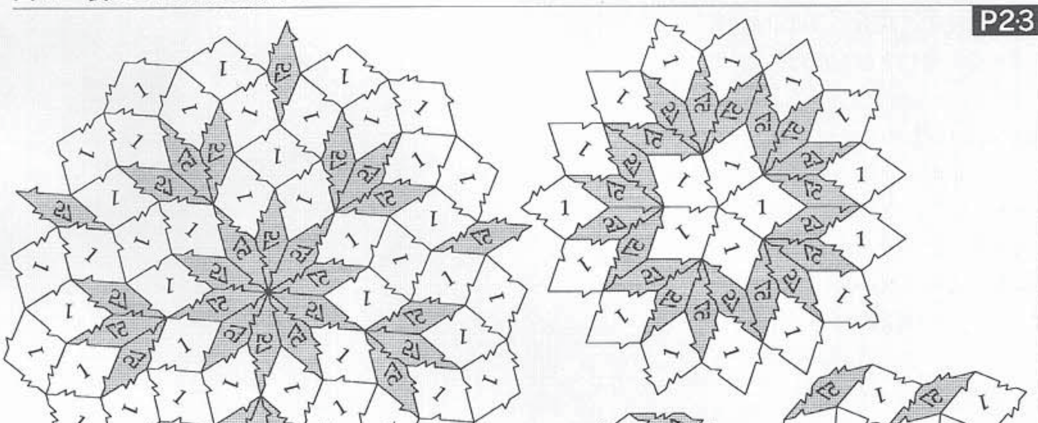


図 18　裏返しP2･3の組み合わせ

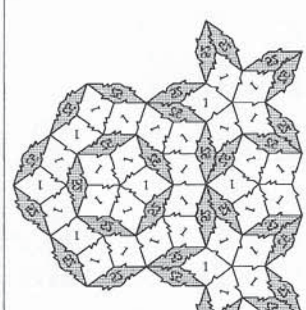


図 19　裏返しPP
他の組み合わせ

6. まとめ

本稿では前稿に引き続き、数学者たちの間で話題になったペンローズ・パターンを題材にとりあげた。そしてペンローズが提示した組み合わせルール以外の組み合わせをさぐってみた。

ペンローズは組み合わせにあたり、2種のベクトル表記、裏返しなしという条件をつけた。そのベクトル表記において、ベクトル表記は異なっても同じ組み合わせ結果をあらわすものが複数でてくるという問題を本稿であきらかにすることができた。また他の組み合わせルールをさぐった結果、さまざまな組み合わせバリエーションを得ることができた。そしてそれらを特徴別に分類することができた。

さらに本稿では、ペンローズがしめした組み合わせルールの“裏返しなし”を“裏返しあり”とした場合をさぐってみた。その結果、“裏返しあり”でペンローズ・パターンが成立する組み合わせルールを提示することができた。その他、“裏返しあり”ならではのユニークな組み合わせをいくつか提示することができた。

本稿では前稿に引き続き、エッシャー・パターンへの図形変換をこころみた。ベクトル表記による組み合わせが確認できる図形であるならば、何かしらのエッシャー・パターンに図形変換できることをあらためて確認することができた。

ペンローズ・パターンやエッシャー・パターンなどのすぐれた題材は、ただ作品として鑑賞するばかりではなく、パターン・デザインの課題として受けとめていくことが重要であり意義があると思われる。引き続き研究していきたい。

付記

ペンローズの非周期的パターンは、以前、結晶学の世界において注目されたことがあった［注3］。そして現在、今度は科学の最前線において話題を提供している。発信者は、他ならぬペンローズ自身である。

現在、科学の世界で話題を集めているものに、コンピューター・脳・DNAがある。これらは21世紀の主役ともいわれている。コンピューター・脳・DNA、この3つの共通項は「情報」である。そして「情報」の科学的解明が進んだ先には、どのような世界像が待ち受けているか。それぞれの専門家たちが予見を述べている。たとえば人工知能が可能になる（ミンスキー）、意識はDNAで解明される（クリック）など。ペンローズもそれら予見者の一人として独自の見解「マイクロチューブル説」をあらわし反響をおよぼしている。非周期的パターンが登場してくるのは、その自説においてである。

前稿で、2種のひし形を非周期的にしきつめる際のアルゴリズムが存在しないことについて触れた。ペンローズは、さらにポリオミノと呼ばれる正方形をくっつけたパズルゲームを引き合いにしてアルゴリズムが存在しない（＝計算不可能性）実例を私たちにしめす［注4］。つまり、他愛もないパズルゲームさえも計算では解決できないとして、計算を前提とするコンピューターによる人口知能信奉者たちに警鐘を鳴らすのである。

「われわれは意識を用いることによっていかなる種類の計算活動も越える活動を遂行できる」［注5］

ペンローズ・パターンは、当初は遊びの延長線上で発見されたという。しかし後年、そのペンローズ・パターンが自説を掘りさげていく過程で大きな役割を果たすことになるとは、おそらくペンローズ自身も予想していなかったに違いない。たかがパターン問題、されどパターン問題であった。

以上“非周期的パターン”をめぐる現在の状況を付記しておく。

注

1）藤田伸：ペンローズの非周期的パターンとエッシャー・パターンに関する考察、デザイン学研究、143、29-38、2001

2）ロジャー・ペンローズ、林一訳：皇帝の新しい心、みすず書房、475、1994

3）ロジャー・ペンローズ、林一訳：皇帝の新しい心、みすず書房、492、1994

4）ロジャー・ペンローズ、林一訳：心の影1、みすず書房、35～39、1994

5）ロジャー・ペンローズ、林一訳：心の影1、みすず書房、1、1994