研究論文 : 論文 ORIGINAL ARTICLES
Received February 6, 2004; Accepted December 24, 2004

ペンローズ・パターンを題材にしたパターン・デザイン研究 (II)

Pattern Design Research Using the Penrose Pattern (II)

● 藤田伸
有限会社リピートアート
Fujita Shin
Repeat Art LTD.

● Key words: Pattern Design, R.Penrose, M.C.Escher

要旨

本研究は、科学者ペンローズが発見したペンローズ・パターンを題材に、パターン・デザインのあらたな展開を模索したものである。本研究ではペンローズが提示した以外の組み合わせ条件に焦点をあてた。その際、まずは組み合わせ条件の全体像を把握し、分類化をこころみた。ペンローズ・パターンにおいては "2種のベクトル表記" および "裏返しなし" が条件になっているが、本研究ではそれを "1種のベクトル表記" および "裏返しあり" とした場合の組み合わせ条件を探った。その結果、多くのユニークな組み合わせ条件を提示することができた。同時にあらたな非周期的パターンを示唆することができた。また前編では M.C. エッシャーが制作したエッシャー・パターンへの図形変換方法および作例を提示したが、本編においても引き続きエッシャー・パターンへの図形変換をこころみた。本研究を通して、パターン・デザインの奥行きと可能性を確認することができた。

Summary

This study strives to find new directions for pattern designs taking the Penrose patterns discovered by the scientist Roger Penrose as its theme. This research focuses on finding condition combinations other than those presented by Roger Penrose. This effort involved first of all trying to grasp an overall image of these condition combinations and then categorizing them. Conditions for Penrose patterns are that there are "two types of vector signs" and "no reversals" in the patterns. Our current research however, explores combination conditions that "allow reversals" and "one type of vector sign" in the patterns. Results from this effort allowed proposing many new unique condition combinations. At the same time we were able to suggest asynchronous patterns. The previous paper presented drawing models and methods for graphic conversion to Escher patterns discovered by the artist M.C. Escher. This current paper follows up on this, by attempting graphic conversions to Escher patterns. This research work further made us aware of the depth and further possibilities offered by pattern design.

1. はじめに

本稿は平成13年度に発表した『ペンローズの非周期的パターンとエッシャー・パターンに関する考察』[注1] に続くものであり、本稿の研究目的は前編で得た考察をさらに深めていくことにある。

数学の世界においては、オックスフォードの数理物理学者ロジャー・ペンローズが発表した非周期的パターン（以下ペンローズ・パターンと称する）に関して、これまでさまざまな研究成果が報告されている。数学の世界に限っていえば、ペンローズ・パターンを題材にして、新たに数理的な研究結果を提示することは容易なことではない。しかし、パターン・デザインの視点からペンローズ・パターンをみると、独自の研究課題をみつける余地がまだ残されている。数理的なこだわりに縛られる必要がない分、柔軟な発想で挑むことができるからである。

ペンローズは、不可能図形「ペンローズの三角形」[注2] にみられるように数学遊戯の達人としても名高い。また10歳のときから自作の幾何学パズルで遊び、高校生のときには解を得るまで平均5時間を要する立方体パズルを制作していたほどのパズルマニアとしても知られている [注3]。ペンローズの主要な業績は相対性理論と量子力学に関するところにあり、ペンローズ・パターン発見自体が目的をともなわない数学遊戯的な副産物にすぎなかったという。されればその数学遊戯的な副産物を、デザイン遊戯的に拡張させることに対して、ペンローズ自身、歓迎するに違いない。

ペンローズ・パターンでもちいられる図形は、内角が36度と144度のひし形と、内角が72度と108度のひし形である。そしてその2種のひし形の組み合わせにあたり、2種のベクトル表記にくわえて "裏返しなし" という条件（以下ペンローズ・ルールと称する）を提示した。この条件こそ非周期的にしか組み合わないための画期的なアイデアであった。本稿ではペンローズ・パターンでもちいられた同じ2種のひし形をもとに、組み合わせ条件を1種のベクトル表記および "裏返しあり" に変更すると、どんな組み合わせが可能になるかを探ってみた。このなかに未だみたこともない組み合わせや新たな非周期的パターンが存在するかもしれない。そんな期待を抱きながら本題に入っていきたい。

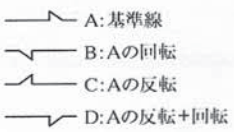


図1　4種のベクトル表記

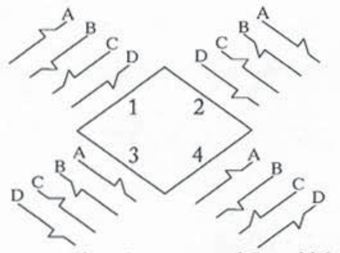


図2　各辺とベクトル表記の対応

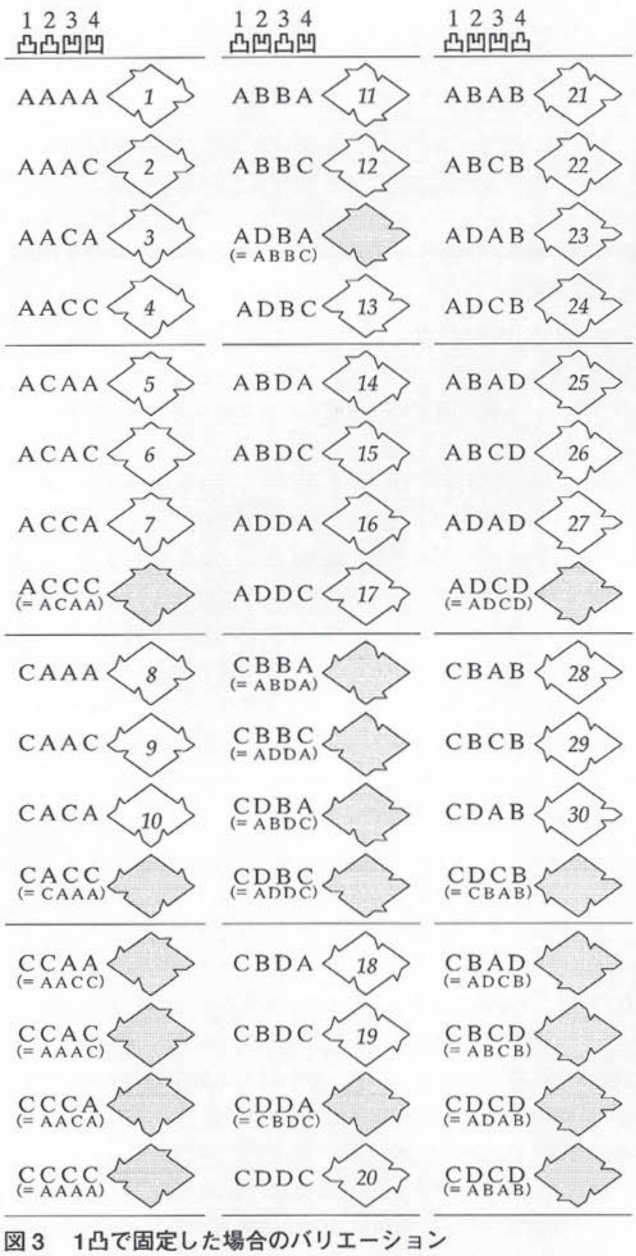


図3　1凸で固定した場合のバリエーション

2．組み合わせバリエーション
（1種のベクトル表記、裏返しありの場合）

1種のベクトル表記、裏返しありという条件で、組み合わせのもとになるひし形を選ぶ方法として図1、2、3をしめす。

まずは4種のベクトル表記にA〜Dというアルファベットをつけた（図1）。次にひし形の四辺に1〜4の番号をつけて、A〜Dを対応させる（図2）。たとえばひし形の1の辺にA、2の辺にA、3の辺にA、4の辺にA、を対応させるとAAAAとなる（図3）。組み合わせにあたり、ベクトル表記の凹凸がペアで

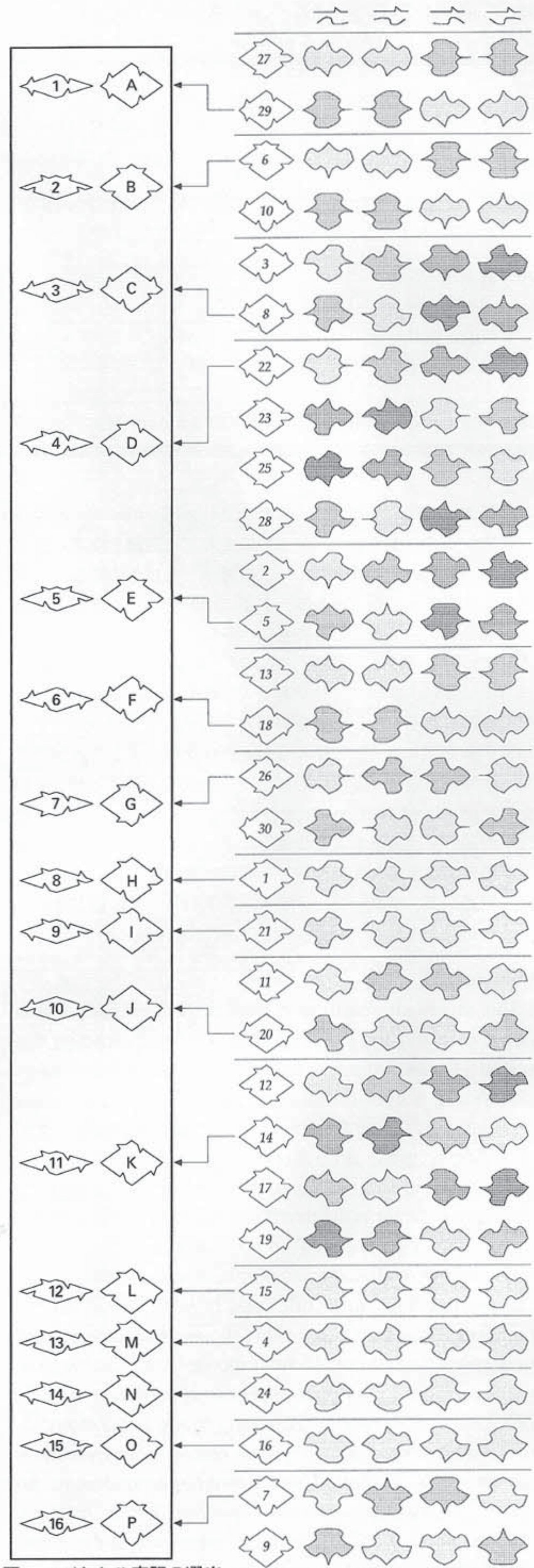


図4　ベクトル表記の選出

表1　組み合わせ結果

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	P4	P4	P4	P4	P4	×	×	P4	P4	×	×	×	×	×	×	×
B	P4	P4	P4	P4	P4	×	×	P4	P4	×	×	×	×	×	×	×
C	P4	P4	P3·4	P4	P4	×	×	P4	P4	×	×	P2	P2 ●	P1·2 ●	P1	×
D	P4	P4	P4	P4	P4	×	×	P4	P4	×	×	×	×	×	×	×
E	P4	P4	P4	P4	×	P4	×	P2·4 ●△	P2·4 ●△	P2	×	×	P2	P1	P1	×
F	×	×	P4 ●	×	×	×	×	×	×	P3	×	×	×	×	×	×
G	×	×	×	P1	×	×	P1	P1	P1	×	P1	P1 △	P3	P3	×	×
H	P4	P4	P4	P4	P4	×	P2 △	P4	P1·2·3·4 ●	P2 △	P1 △	P1·2 ●	P2 ●	P2 ●	P2 ●	P2 △
I	P4	P3·4	P4	P4	P4	×	P1 △	P4	P3·4	P1 △	×	P1	×	×	×	×
J	×	×	×	×	×	P3	P2 ●	P2 ●△	P2 △	P1	P2	P2 ●△	P2 ●△	P2 ●△	P2 ●△	P2 ●
K	×	×	× ●	×	×	× ●	×	P2 △	P2 △	×	P5 ●	P1	P2 △	P2 △	P2 ●△	×
L	×	×	P2	P2	P2	×	P1	×	P1	P1	P2	P1	×	×	P2	×
M	×	×	P2	P2	P2	×	P3	×	P1	P1	P1	P1	P3	P3	×	P3
N	×	×	P3	P1	P3	×	P3	×	P1	P1	P1	P1	P3	P3	×	P3
O	×	×	×	P1 △	×	×	P2	P2 ●△	P2 ●△	P2 ●△	P1	P1	P2 ●△	P2 ●△	P2 ●△	P2 △
P	×	×	×	×	×	×	P1 ●△	P2 ●△	P2 ●△	P2 ●	P1	P2 ●△	P2 ●△	P2 ●△	P2 ●△	×

(×＝しきつめ不可)

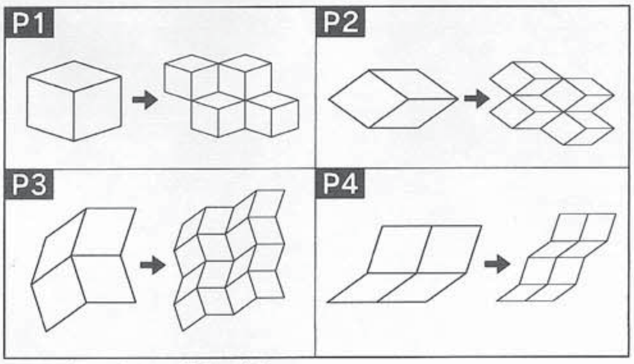


図5　組み合わせ基本分類

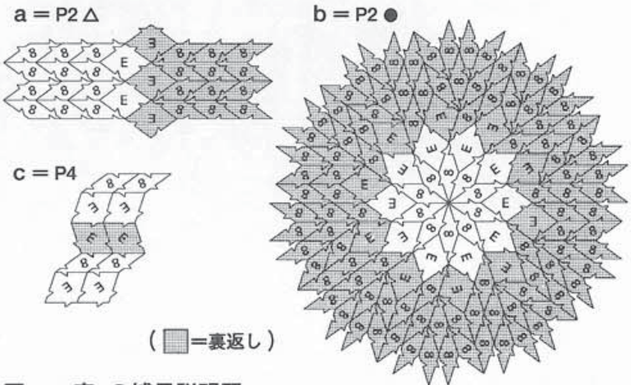


図6　表1の補足説明図

存在することを条件とした。またひし形を円順列の一種と考え、一辺を凸で固定して得られたバリエーションを図3に列記した。図3において、回転や裏返しによって重複するひし形をグレーであらわした。その際どれと重複しているかを、たとえば（＝ABBC）というように記号で明示した。その結果、図3にある30種のベクトル表記バリエーションを得た。

次に、この30種を16種に絞り込むプロセスを図4であらわした。ベクトル表記上の注意点として、ベクトルの表記が異なっても同じ図形があらわれる場合がでてくる。それを確かめていくために、ベクトルの表記をもとに共通の自由曲線をもちいて実際に図形変換をおこなった。すると、同じ図形があらわれるグループがあきらかになる。たとえば図4の右上の27番のひし形と29番のひし形はベクトル表記が違う。しかしできあがる図形は重複している。このような場合、27番か29番のどちらかに代表させても構わない。他も同様である（ここでは、それぞれ以前書いた著書との照合を優先させて選びだした）[注4]。

このように選びだした結果が図4左側、太線枠内の16種である。ひし形は2種あるので、一方には1〜16、もう一方にはA〜Pという識別記号にあらためた。以下、この太線枠内の識別記号で通すこととする。

さて、この16×16＝256通りの組み合わせの総当たり結果が表1となった。表1の結果を得て、何を基準に分類すべきかという問題が生じてくる。本稿では分類にあたり図5のP1〜P4という基本組み合わせを基準とした。そしてP1〜P4にあてはまらないケースをP5とした。分類に関しては、この分類基準が唯一のものではなく、他の基準を設定すると違う全体像がみえてくるかもしれない。

図4の図中に小さく△や●の記号がある。これを図6の例で説明すると、図6-aはたしかにP2で組み合うが“裏返しなし”と“裏返しあり”の接点が一度しかない。そんなケースに△をつけた。1種のベクトル表記、裏返しなしの組み合わせでは、そんなケースがいくつか登場してくる。また回転対称による組み合わせが可能なケースに●をつけた。図6-bの場合は回転対称による組み合わせ可で△がつく。図6-bは、この先いかに拡張させても“裏返しなし”の中心部分があらわれることは二度とない。図6はその他にP4の組み合わせもできる（図6-c）。そこで、図6は表中において P2·4●△ とあらわした。また表1において、組み合わせ不可を×印およびグレーであらわした。

なお本稿でも前稿に引き続き、エッシャー風パターンへの図形変換をこころがけた。これは科学でいえば基礎と応用、美術でいえば具象と抽象を橋わたすにあたり、具体的な手がかりを与えるものである。同時に、無機的な幾何図形の羅列に終始しがちなパターン・デザイン問題に彩りを与えることができる。ただ、一種の線だけで2種のひし形を同時に変換させるのは難しい作業であり、似たような鳥や魚のかたちしか得られなかったが、提示することに意義があると判断した。

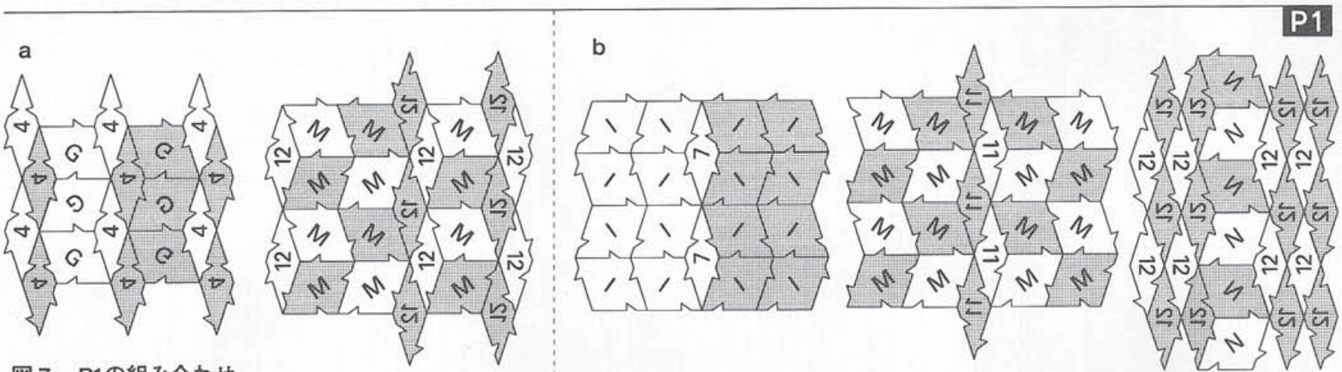


図7　P1の組み合わせ

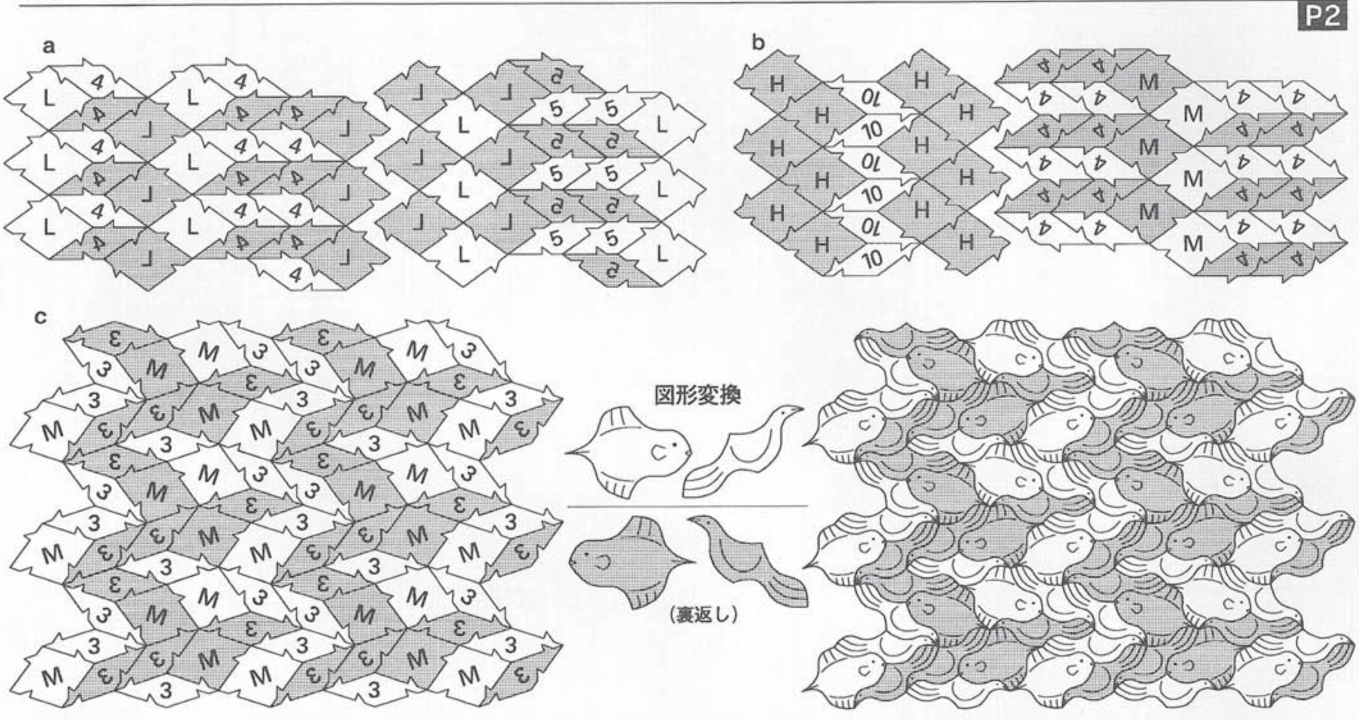


図8　P2の組み合わせ-1

3. 組み合わせの特徴
（1種のベクトル表記、裏返しありの場合）

この1種のベクトル表記、裏返しありの条件下では、2種のベクトル表記、裏返しなしに比べて、どの組み合わせも表情豊かで一様ではない。P1〜P4という仕分けのなかで、平均的な特徴をしめす組み合わせ例を選ぶのに苦労するぐらいである。本稿においては、なかでもとりわけユニークな組み合わせの提示につとめた。

3.1. P1の組み合わせ

はじめにPIのみで組み合うタイプを図7に代表させた。図7-aに比べて、図7-bは左右にシンメトリーに展開していく組み合わせを特徴とする。図7-bにおいて、左右をつなぐ中間パターンは、この先組み合わせを拡張したところで二度と登場することはない。この図7-bのような組み合わせを、数学の世界において周期性があるとみなされるかどうかは不明である。

表1のなかで、N-9、N-12の組み合わせは図7-aと図7-b、双方の組み合わせができる。また表1のなかで、H-12、J-12、O-12、P-7は回転対称による組み合わせができる。他にC-14、C-15、K-12において部分的な回転対称の組み合わせを確認している。

3.2. P2の組み合わせ

P2のなかで、回転対称による組み合わせができないタイプを図8に代表させた。図7-b同様、シンメトリーな拡がりをみせる組み合わせがいくつもでてくる（図8-b）。このシンメトリーなタイプの方が多いぐらいである。図8-aのタイプのなかで、とりわけユニークな組み合わせが図8-cだ。当初、このM-3は組み合わせ不可と判断していたが、あるとき予想もつかなかったかたちで組み合わせができた。この図8-cの組み合わせは、表1のなかでただひとつM-3にて可能となる。

P2において、回転対称による組み合わせがでるタイプが相当数ある。それらはいずれも図8-aと同様の組み合わせも可能だ。それぞれ“裏返しなし”と“裏返しあり”が個性的に分布している。ここでは偏りなくバランスよく分布している図9に代表させた。図9のなかで、図9-aと図9-bを合体させることはできない。他の回転対称をともなうP2も同様である。ただしP2のみに限らない場合は合体可能なケースがでてくる。

P2の回転対称による組み合わせがでるタイプのなかで図10は変わっている。ペンローズがしめした2種のひし形は鋭角がそれぞれ72度、36度である。それらのひし形を回転対称

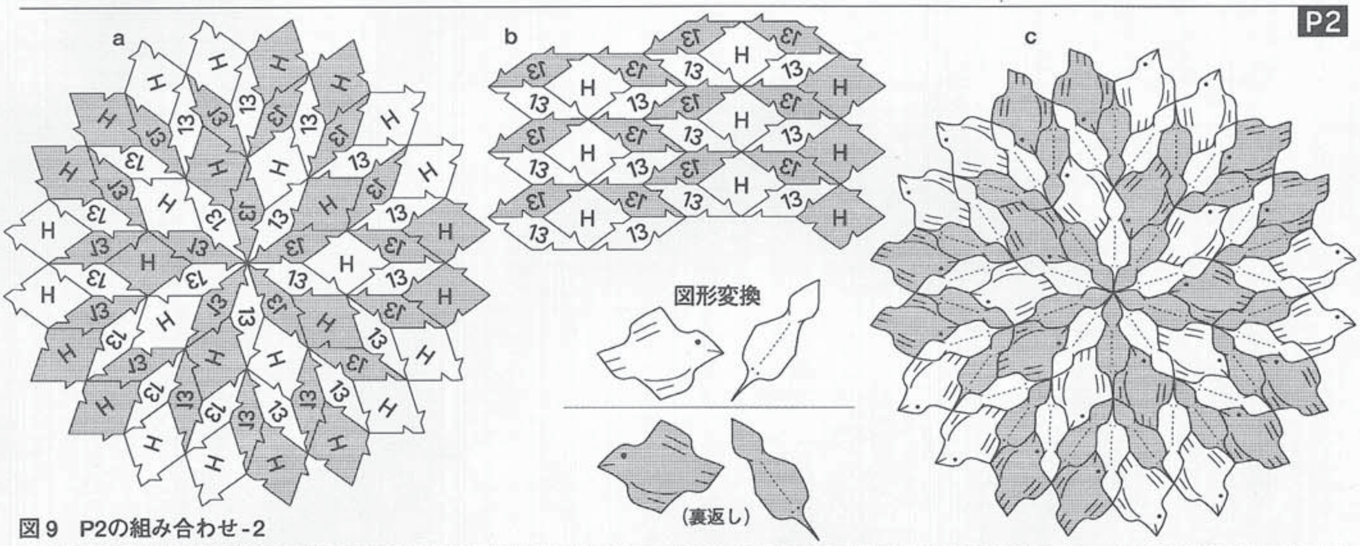
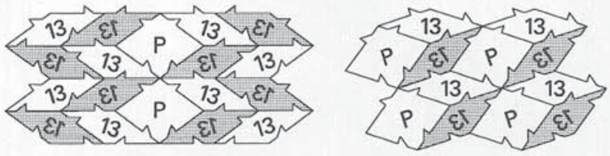


図 9　P2の組み合わせ-2



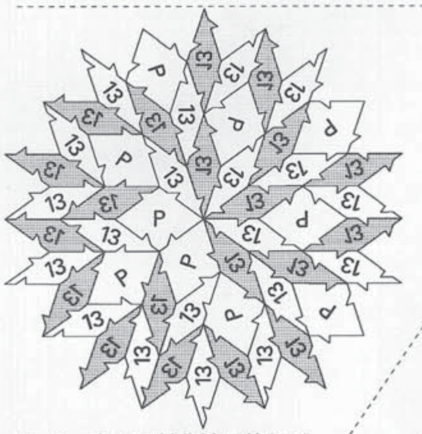


図 10　中心の対称性に特色がある組み合わせ

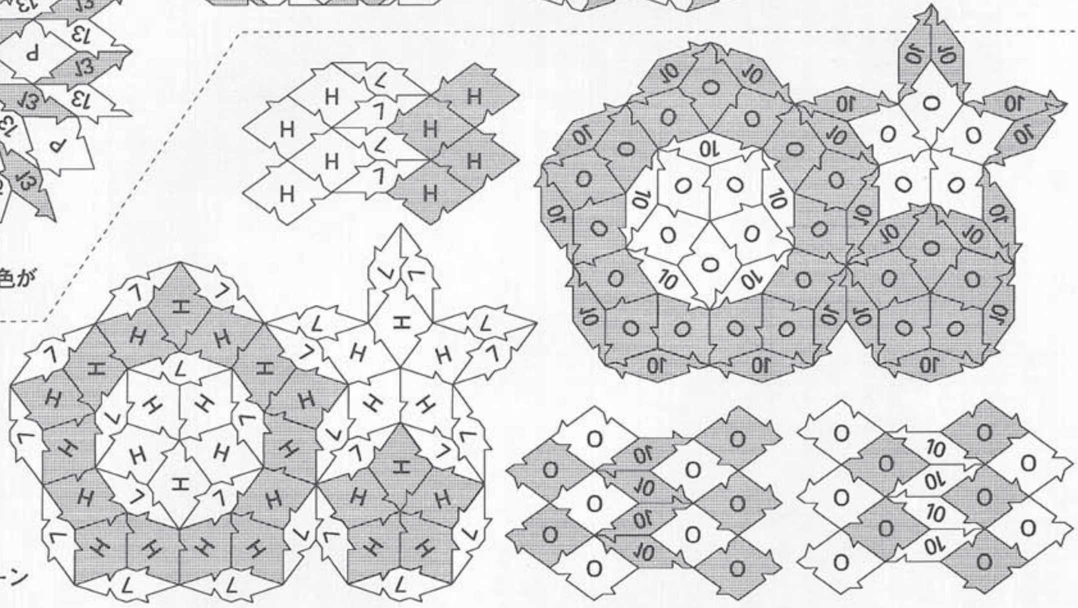


図 11　ペンローズ・パターンを描く組み合わせ

で組み合わせる際、中心には5回対称あるいは10回対称があらわれる。ところが1種のベクトル表記、裏返しありという条件下においては、中心の対称性が変則的でも組み合わせ可能なケースがでてきた。ただ図10の場合、一方のひし形のベクトル表示がシンメトリーで表裏どちらでも適用できるタイプである。稀少なケースだけに、その点が惜しまれる。

1種のベクトル表記、裏返しありという条件下において、ペンローズ・パターンを描くタイプが2種登場してくる。図11である。しかし図11をみるとわかるように、ペンローズ・パターンのみの組み合わせを強制させていわけではない。どちらもP2でシンメトリーに拡張できる他の組み合わせができる。この図11のP2の組み合わせが非周期とみなされるのかどうかは不明である。そのため本稿では分類にあたり、あえてペンローズ・パターンという分類項目を設けなかった。

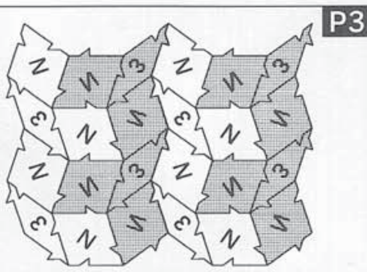


図 12　P3の組み合わせ

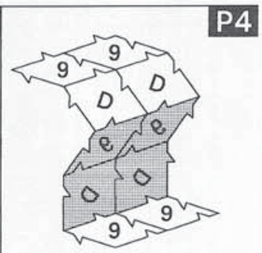


図 13　P4の組み合わせ

3.3. P3 P4 の組み合わせ

P3のみの組み合わせにおいて、図12のようなタイプが2種でてきた。表1のなかのN-3、N-16である。組み合わせの基本分類としてP3を設定したが、こんなかたちでP3が組み合うことは予想できなかった。なおP4のみの組み合わせは相当数あったが、特筆すべき組み合わせは得られなかった。

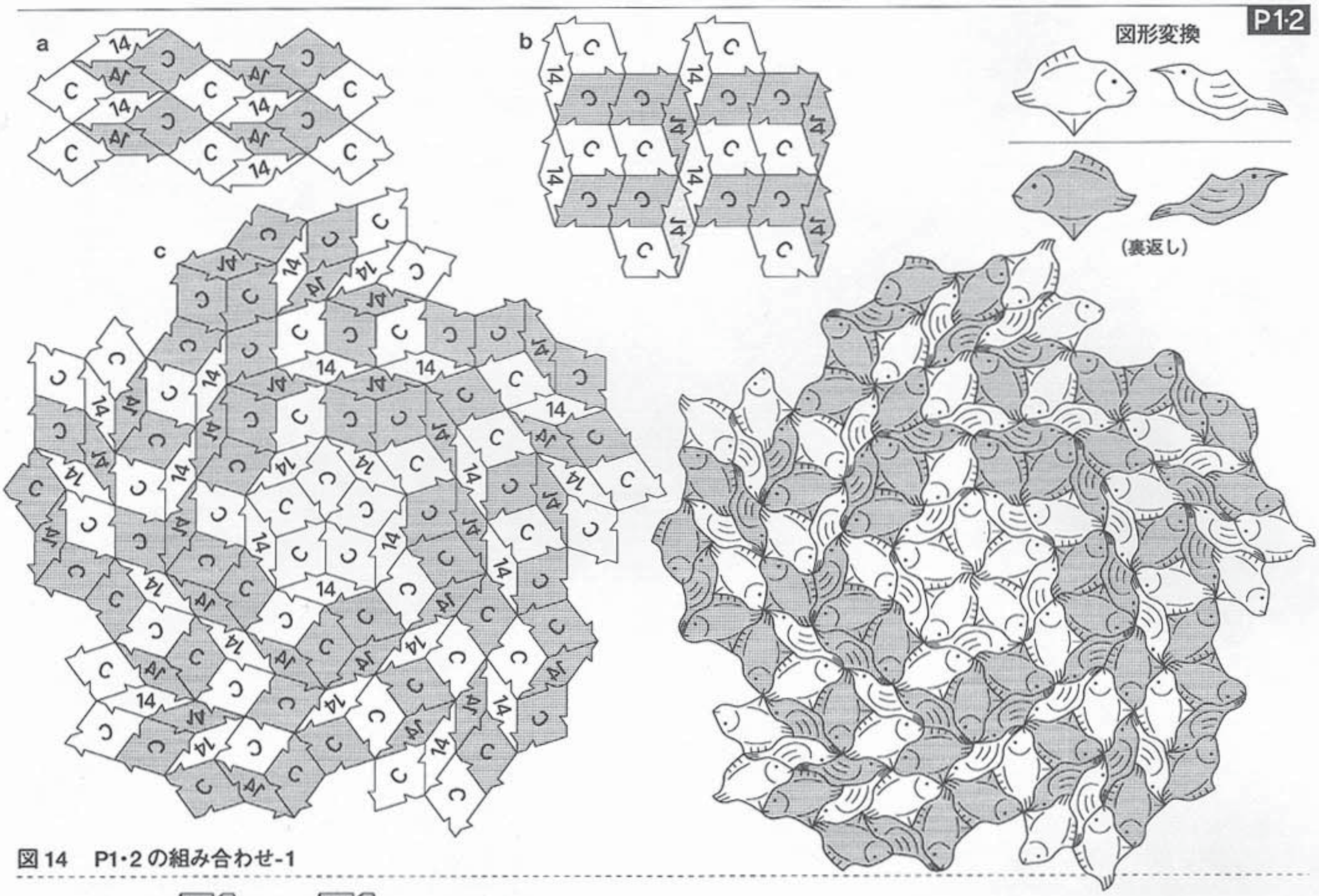


図14　P1·2の組み合わせ-1

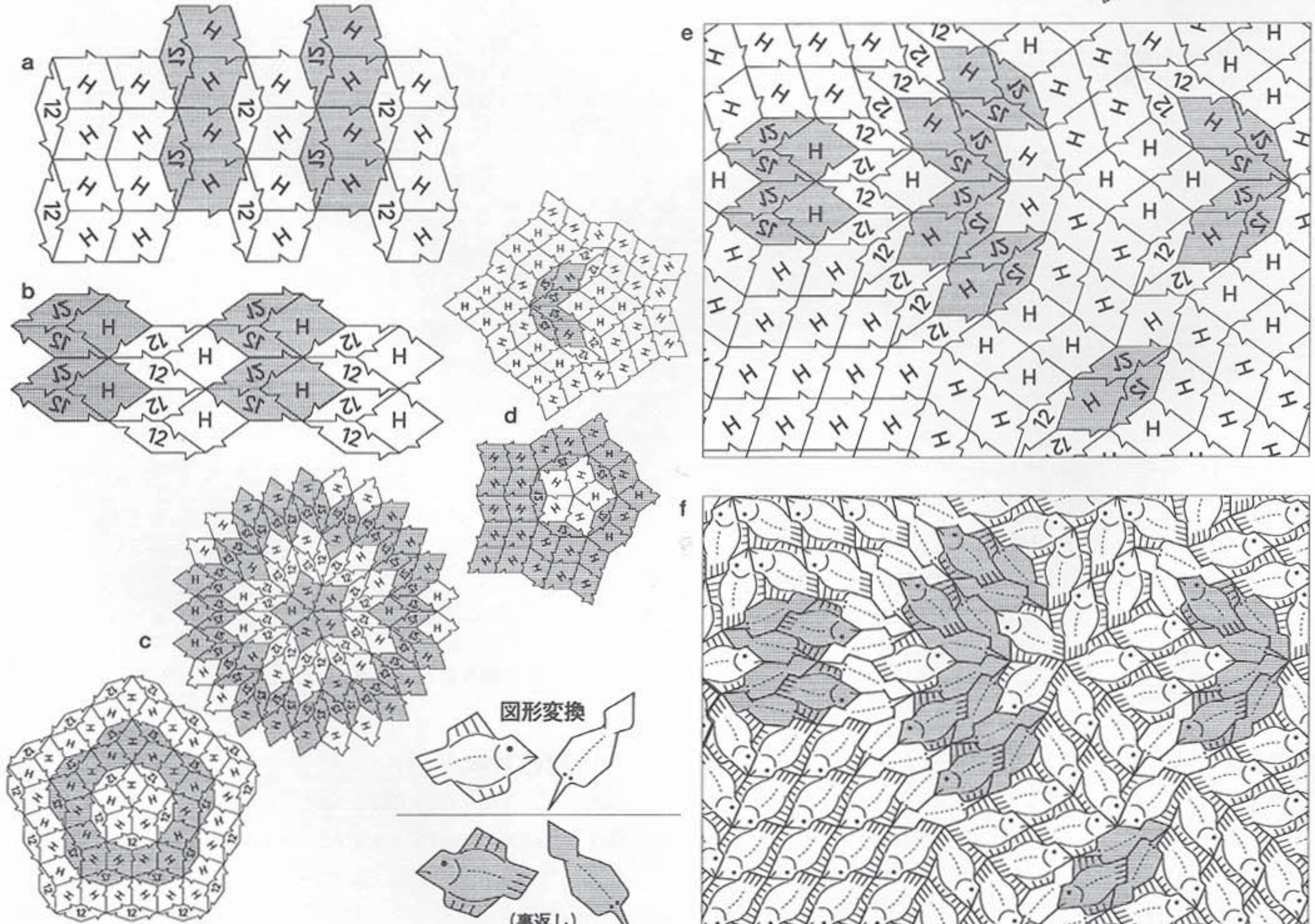


図15　P1·2の組み合わせ-2

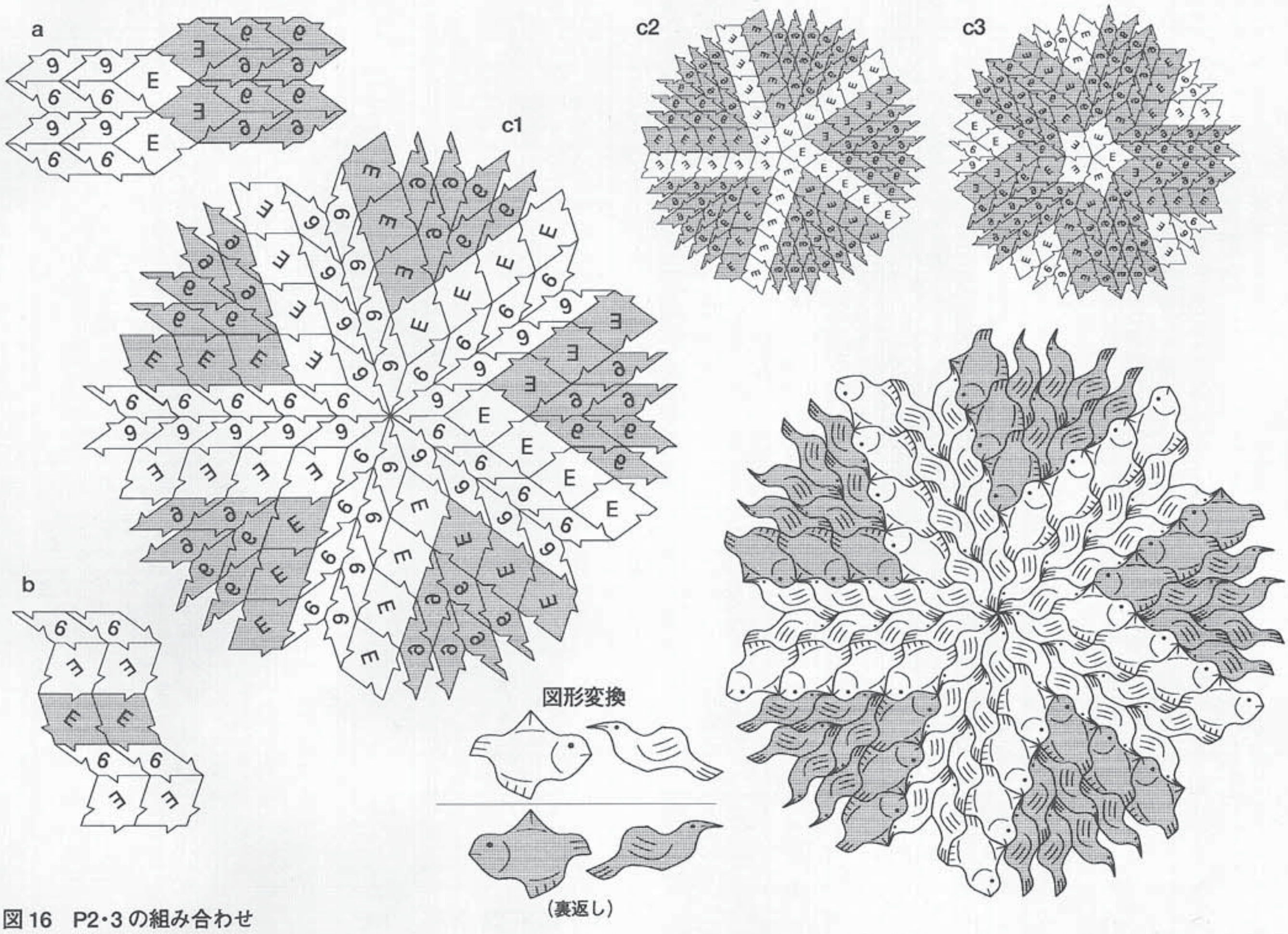


図16 P2・3の組み合わせ

3. 4. P1·2の組み合わせ

1種のベクトル表記、裏返しありの条件下において、P1、P2のみの組み合わせができて、なお回転対称による組み合わせができるタイプが2種ある。

まずは図14である。図14ではaがP2、bがP1となっている。図14-cは回転対称による組み合わせであるが、この先、拡張を続けて組み合うかどうか確認できていない。

これと同じように回転対称による組み合わせが確認できていないケースが他にも存在する。図4の表でいえばC-14、C-15、H-16、K-3、K-6、K-11、K-12である。これらのうち可能性を秘めているのが、このC-14（図14-c）、K-11である。他のC-15、H-16、K-3、K-6、K-12は、それぞれ40〜55ピースまで拡張した段階で先に進まなくなる。部分的に確認済みということである。

先の図11の2種において、実は400ピース以上組み合わせてみても最終像がみえなかった。しかしペンローズ・パターンにあてはめたところピタリとおさまってしまった、という経緯があった。図11においては、一応ペンローズ・パターンにもおさまることを確認できたということで、他の組み合わせもできるかもしない。

パズルゲームやクイズなどで、あらかじめ何かしらのヒントを得ていると、解答への道筋がたてやすくなる。この種の組み合わせも、それと似たようなところがある。未知なる組み合わせはヒントを与えてくれない。

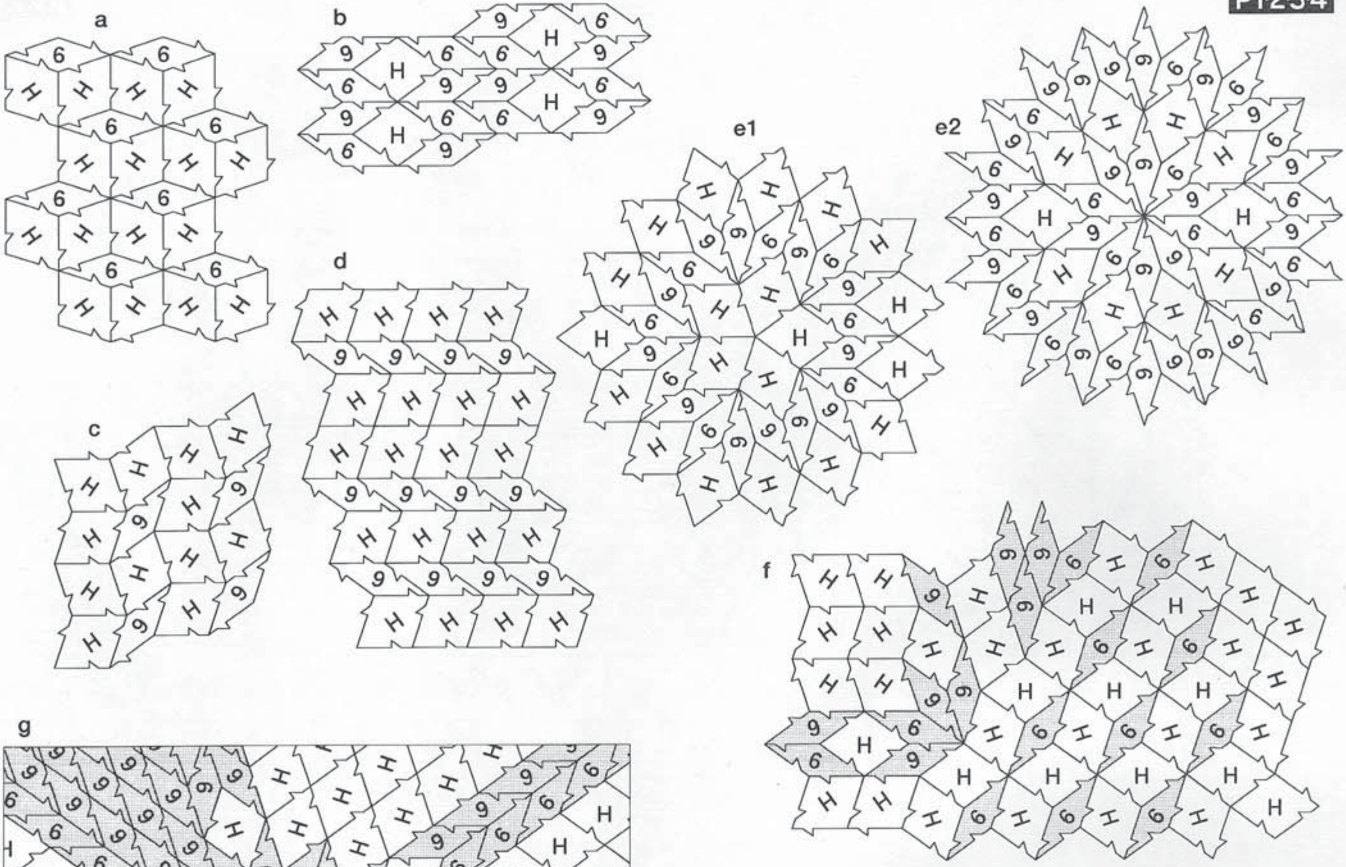
図14-cにおいては、現段階で125ピースまでの拡張を確認している。もしもこの先の拡張が可能であれば、新たな組み合わせとなる可能性が高い。この図14-cは問題提起ということで載せておきたい。

次に図15である。図15ではaがP1、bがP2、そしてcが回転対称による組み合わせとなっている。さらにdのような組み合わせも可能である。

表1の組み合わせ結果をみる限り、P1〜4の分類で複数の組み合わせが同時に可能な場合にユニークなパターンが登場する可能性が高いことがいえそうだ。図15はその典型例である。図15-dを確認後に図15-eを考えて図15-fに発展させた。図15-e,fをみてわかるように、組み合わせ条件という制約のなかでも、創作意図を働かせる数少ないタイプといえる。

3. 5. P2·4の組み合わせ

P2、P4のみの組み合わせができて、なお回転対称による組み合わせができるタイプが2種ある。ひとつは図6であり、もうひとつがこの図16である。図16-aがP2、bがP4、c1〜c3が回転対称による組み合わせである。図16のc1〜c3をみるとわかるように“裏返しなし”と“裏返しあり”の分布がひときわ個性的なタイプである。図16-cは他にも類似した組み合わせができる。回転対称による組み合わせにおいて、このようなタイプは図16の他にはない。



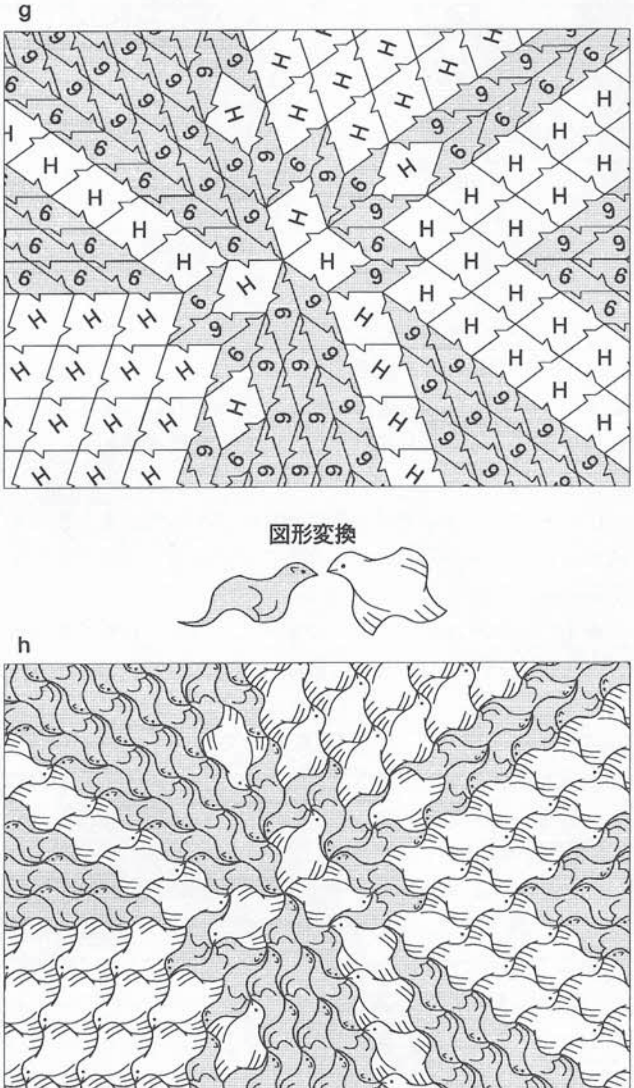


図 17　P1·2·3·4 の組み合わせ

3.6. P1·2·3·4 の組み合わせ

表 1 のなかで、P1〜P4 のみの組み合わせをすべて満たし、かつ回転対称による組み合わせもできるものがひとつだけある。それが図 17 である。図 17-a が P1、b が P2、c が P3、d が P4、e が回転対称による組み合わせである。図 17 はこれまでとりあげてきたなかで最も自由度の高いタイプといえる。

図 17 にはもうひとつ特徴がある。それは裏返しがないことである。本稿では、1 種のベクトル表記、裏返しありのペンローズ・パターン検証をこころみているが、この“裏返しあり”とは条件の緩和を意味するもので、“裏返しなし”も含まれている。表 1 においても“裏返しなし”で組み合わせができるものが相当数あるが、多くは P4 であった。つぎに多いのが P1 であり、そのうち回転対称による組み合わせができるのが図 17 を含めて 4 種あった。P2 の組み合わせはわずかに図 17 のみである。
図 17 の組み合わせルールがいかに稀少な存在であるかがわかる。

図 17 がどれほど自由度が高いかを図 17-f〜h にしめす。これまで裏返し箇所をグレーで表示していたが、図 17-f〜h のみ、組み合わせの特徴がわかるように例外的に“裏返しなし”で片方のひし形をグレーで表示した。図 17-f はランダムに配置した例である。そして図 17-g は、抽象画のような創作を意図して組み合わせた例である。その図 17-g に図形変換を適用させたものが図 17-h である。図 15 と同様、組み合わせ条件という制約のなかでも、創作意図を働かせるタイプが存在するということは、ひとつの収穫といえよう。そして、そんな組み合わせができるのが図 15 と、この図 17 である。

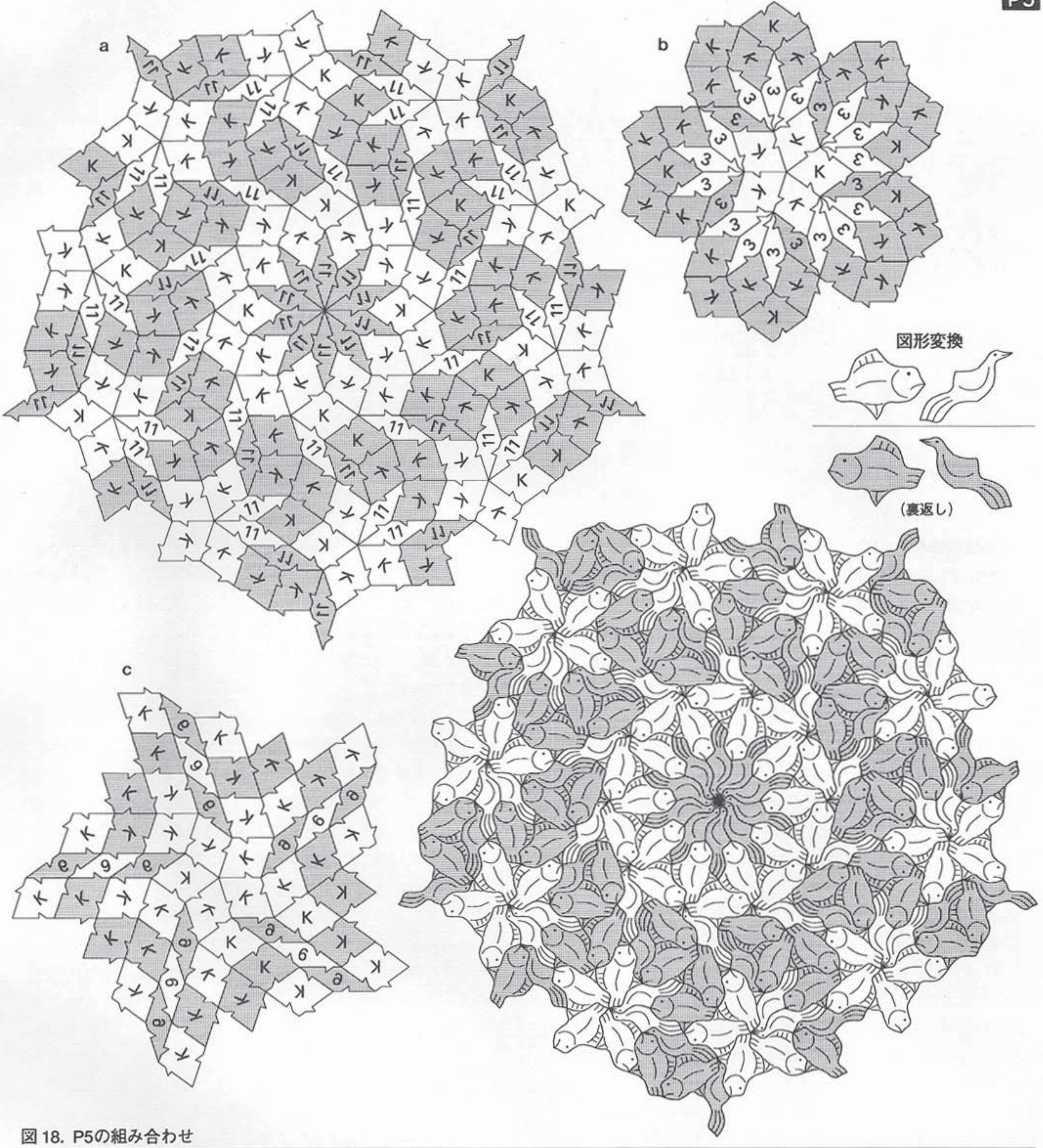


図 18. P5の組み合わせ

3.7. P5の組み合わせ

これまで P1～4 の分類にしたがって、それぞれの特徴を述べてきたが、その分類におさまらない組み合わせを P5 とした。それが図 18-a～c である。図 4 の表中、図 18-a が K-11、b が K-3、c が K-6 の組み合わせとなる。

これらは P1～4 のみでは組み合わせができないが、回転対称による組み合わせを図 18 のように確認している。このうち図 18-b と c は、これ以上拡張できそうにない。しかし図 18-a は、この段階で 180 ピースまで拡張できている。この先、拡張できるとしたら、ペンローズ・パターンとは異なる非周期を強制させる、新たなパターンである可能性が高い。

1 種のベクトル表記、裏返しありという条件下においては、ペンローズ・パターンを描く図 11 でさえも P2 という別の組み合わせができている。その際の P2 が非周期的とみなされるかどうかは不明とした。しかし図 18 においては、他の組み合わせ分類ができないことから、まぎれもなく非周期的にのみしか組み合わないことがいえよう。この図 18-a は、この先の拡張が未確認ながらも問題提起として載せておきたい。

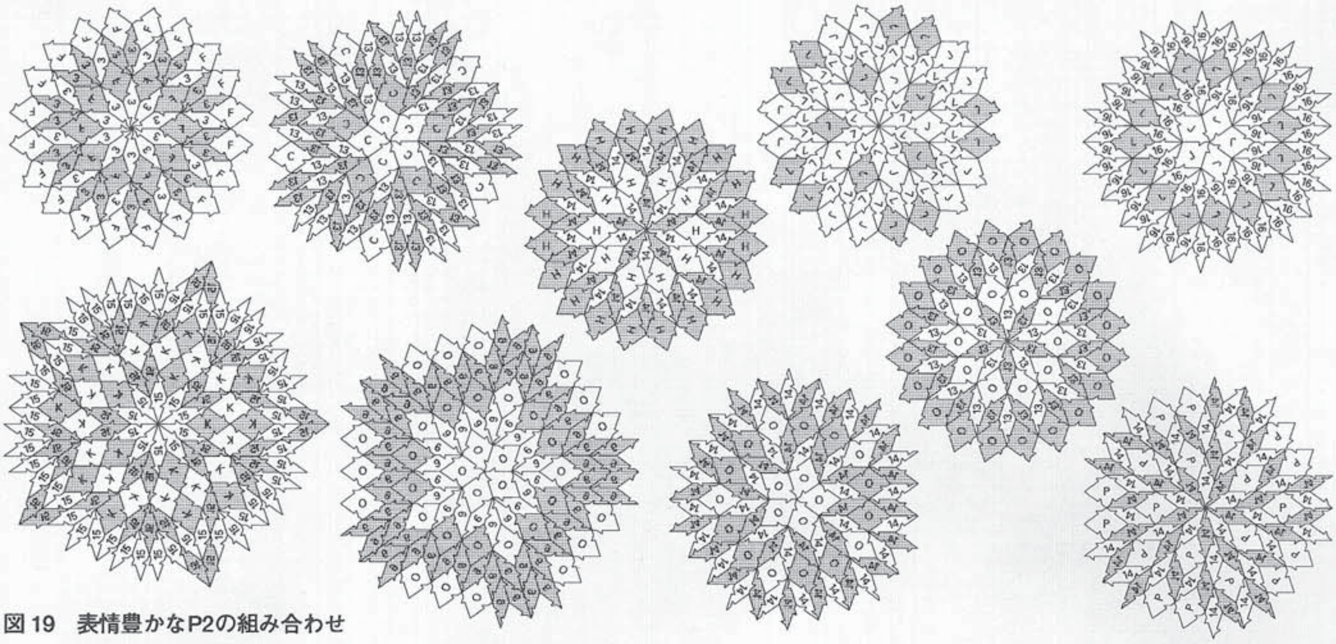


図19　表情豊かなP2の組み合わせ

3.8. P3·4の組み合わせ

その他、P3、P4のみの組み合わせが同時にできるものが3種あった。表1でいえばC-3、I-2、I-9である。いずれも回転対称による組み合わせができない。またP3、P4の組み合わせを混在させることができない。これまで2種以上の分類の組み合わせが可能な場合は興味深い例がでてきたが、このP3·4においては、あえて述べることがみあたらなかったので図を掲載しなかった。

3.9. その他

P2における回転対称による組み合わせに、表情豊かなパターンが多くみられた。組み合わせに関する限りとりたてて述べる特徴はみあたらないが、参考までに図19に提示しておく。

4. まとめ

本稿では、イギリスの数理物理学者ロジャー・ペンローズが提示したペンローズ・パターンをもとにパターン・デザインあらたな可能性を探ってみた。

ペンローズ・パターンにおいて、ペンローズは2種のひし形の組み合わせに際し、非周期的にしか組み合わないための組み合わせルールを提示した。その組み合わせルールは2種のベクトル表記、裏返しなしというものであった。本稿ではそのルールを、1種のベクトル表記、裏返しありに変更して組み合わせを検証した。すると、思いもかけなかった組み合わせを多数得ることができた。

「非周期的にのみ」という数学的関心に対してはペンローズ・パターンとは別に、非周期的にしか組み合わない新規のパターンを示唆することができた。また組み合わせルールという制約がありながらも、創作意図を働かせてパターンを描けるタイプを提示することができた。他にパターン・デザインとしても興味深い組み合わせを多く提示することができた。

さらに本稿では、エッシャー・パターンへの図形変換をこころみたが、いまひとつ思うような結果が得られなかった。面白い組み合わせルールと成形のしやすさは必ずしもイコールでは結ばれない。むしろ面白い組み合わせルールになればなるほど、図形変換が思うようにならなくなるといってもよい。1種のベクトル表記、すなわちひとつの線だけを用いてふたつのかたちを同時に描く作業は難しく、結果的に似たようなかたちしか創出できなかった。

以上、未だみたこともないユニークな組み合わせが無数にあるかもしれないという本稿の目的は、ペンローズが提示したひし形をもとにする限り、ある程度果たすことができた。

ペンローズ・パターンでは、鋭角36度、72度のひし形が選ばれている。しかし回転対称による組み合わせが可能なひし形の組み合わせは他に何通りも存在する。また、組み合わせ可能な基本図形はひし形に限らない。無数に存在する。それらのなかにも、未だみたこともないユニークな組み合わせがたくさんあるに違いない。前稿のまとめに引用した「われわれにとって最も大きな驚きは、多分、敷きつめ問題についてあまりにも少しのことしか知らなかったことであった」という数学者の言葉が、本稿において特に強く実感できた。

注

1）藤田伸：ペンローズの非周期的パターンとエッシャー・パターンに関する考察、デザイン学研究、143、29-38、2001

2、3）坂根厳夫：境界線の旅、朝日新聞社、97、1984

4）藤田伸：連続模様の不思議、岩崎美術社、36、1998
同著36頁掲載の図が本稿図4とかさなる。同著においてタイリング不可能としたものも本稿ではカウントに入れた（16およびP)。この16およびPは単体でのタイリングが不可能である。同著ではそれを前提としたためカウントに入れなかったが、本稿では前提条件が異なるのでカウントにくわえた。