研究論文：論文 ORIGINAL ARTICLES
Received April 4, 2000 ; Accepted November 16, 2000
51-8 7.011 7.047

ペンローズの非周期的パターンとエッシャー・パターンに関する考察

Considerations of Penrose's nonperiodic Patterns and Escher's Patterns

● 藤田伸
有限会社リピートアート
Fujita Shin
Repeat Art LTD

● Key words : Pattern, Nonperiodic Tilings, Penrose, Escher

要旨

本研究は、数学の世界で話題をよんだペンローズの非周期的パターンと、エッシャーが制作したエッシャー・パターンを題材に、パターン・デザインのあらたな研究課題を模索したものである。ペンローズの非周期的パターンにおいては、非周期的となるための組み合わせを限定させる条件が提示されている。その条件を再検証することで、いくつかのバリエーション・パターンを得ることができた。また、ペンローズの非周期的パターンとエッシャー・パターンの融合を試みた。その際、誰でも作ることができるエッシャー・パターンの制作法を提示することができた。本研究を通じて、ペンローズ・パターンおよびエッシャー・パターンは、今後も継続して研究する価値のあるパターン・デザイン課題であることがわかった。

Summary

In this study, we groped for new themes for a pattern design, focusing on Penrose's nonperiodic patterns that have provided sensational topics among the realm of mathematics and Escher's patterns created by Escher himself. Penrose's nonperiodic patterns present several conditions as limitations on those combinations to generate nonperiodic patterns. We have reviewed them and found some variation patterns. Additionally, we have tried to fuse Penrose's nonperiodic patterns and the Escher's patterns. Those approaches leaded us to provide such a method by which any one can generate Escher's patterns. We find, through this study, that Penrose's patterns and Escher's patterns are themes for a pattern design that include enough value to be approached.

1．研究の目的

ある特定の型がくり返されて使用されるパターンは、わたしたちにとって最も身近で基本的なデザイン課題のひとつである。舗道や建造物の内外壁、服地や生活什器にいたるまで、わたしたちは常に何かしらのパターンに囲まれて暮らしている。このパターン・デザインを研究するにあたり、今日的な課題をみいだすとしたら、どのようなものがあるのだろうか。

基本となるひとつの型をくり返す際、移動の仕方によってパターンはさまざまな表情をみせる。この移動の仕方、つまり対称性という視点からパターン・デザインの歴史をみると、イスラム文化の特異性がクローズアップされてくる。他の文化が、どちらかというと対称性より描くモチーフ内容に焦点をあてて現在にいたっているのにくらべて、イスラム文化は対称性にのみ焦点をあてて発展してきたといえる。イスラムの偶像を排するという教義は、結果的に、高度に抽象化された幾何学的パターンをもたらしたのである。この抽象化されたパターンと具象的モチーフは、それぞれ別の方向に進展して、交わることはありうるのだろうか。そんな疑問にひとつの解決策をしめしたのがエッシャーである。エッシャーは、隙間なくくり返される基本形状そのものを鳥や魚などの具象的なモチーフに変換して数多くのパターン・デザインを創作した。それらは通称エッシャー・パターンと呼ばれる。エッシャーは他にも多くのユニークな作品をしるしとどめたアーティストであるが、ここでは特異な個性としてとどめることなくデザイン的な課題を残していった存在としてとらえたい。特にエッシャー・パターンが内在するデザイン性と可能性は、今後も継続すべき研究課題としてとらえていきたい。

パターン問題は、同時に数学の問題でもある。パターン問題、すなわち対称性の問題は、今日、数学の世界では群論としてあつかわれる。ガロアとアーベルという2人の数学者に端を発した群論の歴史は、まだ200年しか経ていない。数学の世界において、対称性に関する現在までの知を集大成したものに、数学者グリュンバウムとシェファードがあらわした『TILINGS AND PATTERNS』という大著がある［注1］。このなかで「われわれにとって最も大きな驚きは、多分、敷きつめ問題についてあまりにも少しのことしか知らなかったことであった」そし

図１：二等辺三角形

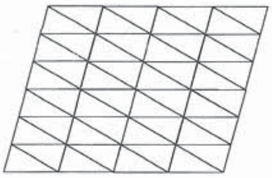


図２：周期的パターン

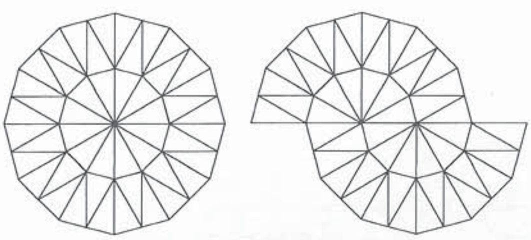


図３：非周期的パターン

て「この分野で最も刺激的な発展のいくつかは、実に、ここ20数年ぐらいの間に得られたものである」と述べられている［注2］。しかし、短期間ではあるがイスラム文化の幾何学パターンの蓄積を凌駕するめざましい進展がなされている。なかでも非周期的パターンの発見は、数学のみならずデザインの分野でも興味深い課題としてとらえたい。とりわけペンローズが発見したパターン（通称ペンローズ・パターン）は二重の意味で興味深い。ひとつは、最も洗練され、かつ話題を提供した非周期的パターンであること。もうひとつは、ペンローズはエッシャーと交流があり、エッシャーのいくつかの作品にアイデアを提供していたことである［注3］。残念なことに、ペンローズが非周期的パターンを発見したのは、エッシャーが他界した2年後の1974年であった。

本稿では、パターン・デザイン研究の今日的な課題として、エッシャーとペンローズが提示したパターン問題をとりあげる。ペンローズ・パターンを、エッシャーが試みたように鳥や魚などの形状で変換すると、非周期の特性がどのようにみえてくるか。また数学的関心とは別に、デザイン的関心で非周期的パターンを課題にするとしたらどのような方向があるのか。これらを考察することで、パターン・デザインのあらたな可能性を模索することを目的とする。

２．研究の背景

２．１．非周期的パターン

ペンローズの非周期的パターンというときの、この周期および非周期という用語は次のように定義されている。ある領域をとると、それを回転や反転をすることなく平行移動して平面充填できるものが周期的パターンである。つまり平行移動に関する対称性をもつパターンを周期的パターンという。非周期とは、逆に平行移動に関する対称性をもたないパターンのことをいう。そして、無限に多くの形は周期的にのみ平面充填が可能である（たとえば正六角形）。他の無限に多くの形は周期的にも非周期的にも平面充填が可能である。これを放射状に平面充填できる二等辺三角形（図1）を例にとると、図1を周期的に平面充填したものが図2である。また図1は非周期的にも平面充填できる。それが図3である。この例のように、合同な形による非周期的な平面充填はすべての場合において周期的な平面充填が可能である［注4］。それでは、非周期的にのみ平面充填が可能なものが存在するかどうか。当初、そのようなパターンはありえないと予想されていたが、1964年のバーガーの論文以降、ロビンソン、アムマン、ペンローズなどによって次々に非周期パターンの存在があきらかにされた［注5］。とりわけペンローズが発見したパターンは、今なお、多くの研究者たちの関心をひきつけていることから、ペンローズ・パターンという名は非周期的パターンの代名詞となりつつある。

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{（黄金分割比）}$$

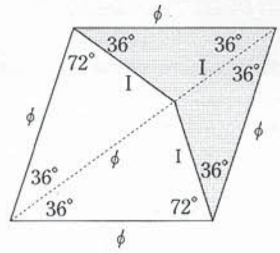


図４：ペンローズ・パターンＡ

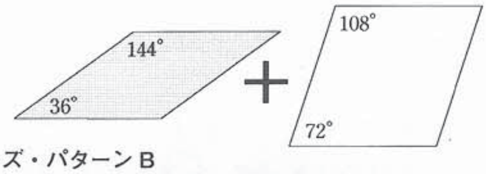


図５：ペンローズ・パターンＢ

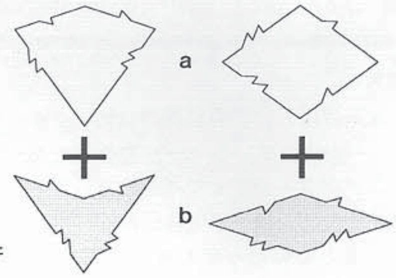


図６：組み合わせの条件

２．２．ペンローズ・パターン

オックスフォード大学の数理物理学者、ロジャー・ペンローズが1972年に発見したパターンは、内角が72度と108度のひし形を図4のように分割したものだ。すべての線分は黄金分割比になっていて、最小の角度は36度、他の角度はすべてその倍数である。この図4を、ここでは仮にペンローズ・パターンＡとする。その後、ペンローズは図4に関連する図5のパターンも発表した。こちらは内角が36度と144度のひし形と内角が72度と108度のひし形を組み合わせるものである。図5は、黄金分割比で構成されていることや、最小の角度が36度で、他の角度はすべてその倍数で構成されていることからも、図4の兄弟関係にあるパターンといえる。この図5を、ここでは仮にペンローズ・パターンＢとする。ペンローズ・パターンＡ、Ｂが非周期的にのみ組み合わされるためには条件が必要である。その条件を満たすひとつのアイデアに図6の凹凸ベクトルがある。

ペンローズ・パターンの一般的な特徴をしめすものとして図7を掲載する。図7のａ-1〜4はペンローズ・パターンＡで、ｂ-1〜4がペンローズ・パターンＢの組み合わせである。図7-ａ、ｂともに1、2、3、4…とフラクタル的構造を生成する。そのと

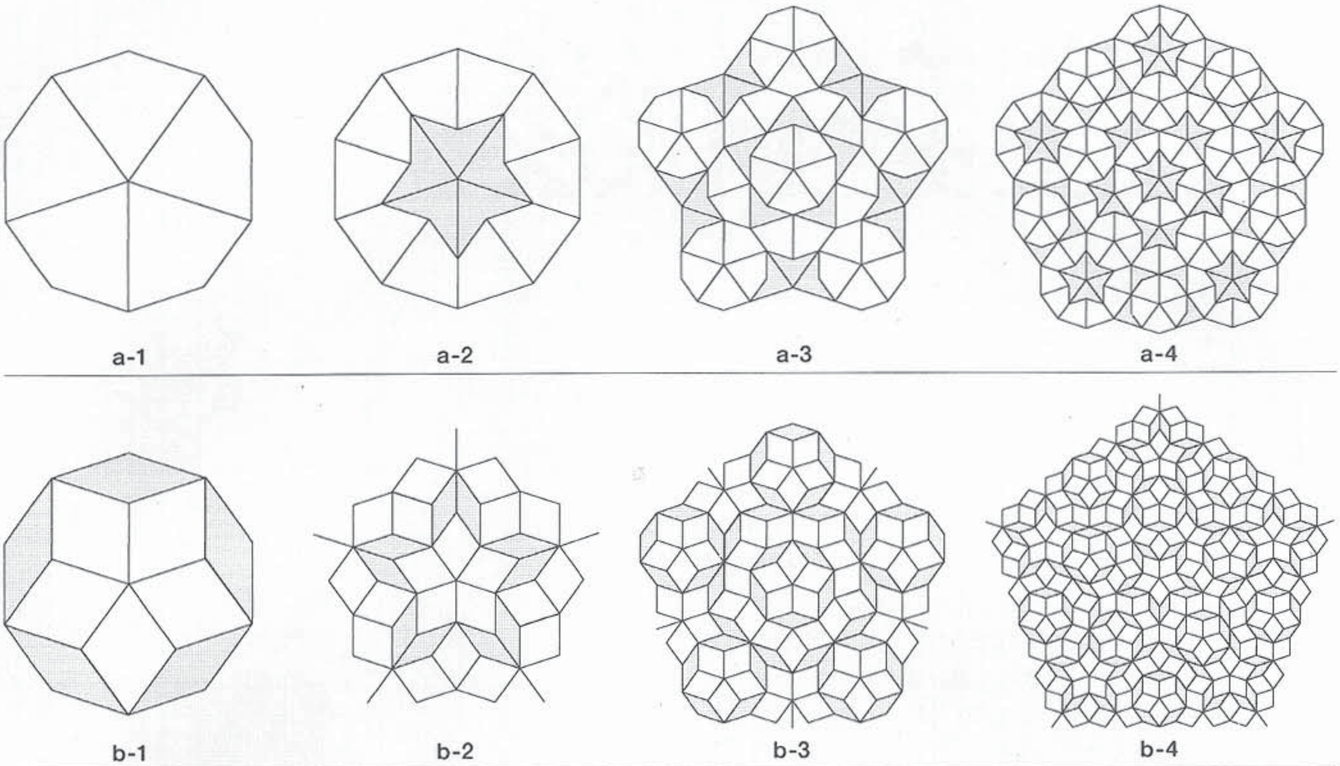


図 7

き、図 7- a、b の 1、2 にあらわれる 5 回対称性の模様が、図 7- a、b の 3、4…と拡張をとげる際、局所に無数回あらわれてくる。そして、任意の模様中の任意の有限領域は、他のすべての模様中のどこかにかならず含まれる。ペンローズ・パターンのそれぞれ 2 つのひし形（図 6 の a、b）の面積の比は黄金分割比となる。ペンローズ・パターンで平面充填する際、図 6 でいえば a は b の 1.618…倍の枚数が必要となり、無限の平面充填においてもその枚数比が保たれる［注 6］。また、図 6 のような、現在、ペンローズが提示した組み合わせの条件だけでは、非周期的パターンになることはできるが欠陥（すき間）がでない保証はない。つまり平面充填のアルゴリズムが存在しない［注 7］。以上のことなどが数学者たちによって証明されている。興味深いことに、ある特定のすき間を中核にして平面充填をはじめるとアルゴリズムが成立する。図 8 では中核の太線部分の外側においては 10 回対称性を描くパターンで平面充填させることができるが、中核の太線部分の内側を平面充填させることはできない。図 8 の太線部分は特定あるすき間のひとつで「十脚類」と名付けられている。図 9 は、太線部分の外側においても内側においても平面充填できる唯一の「十脚類」とされているもので、数学者コンウェイによって発見された［注 8］。ペンローズ・パターンに関しては、この他にも多岐にわたる数学的問題が提起されているが、その多くはまだ解決されていない［注 9］。

ペンローズ自身、遊び心のつもりではじめたと語るパターン問題は、結晶学の世界で意外な進展をみせることになる。1984 年にアルミニウムとマンガンでできた合金が、局所的な 5 回対称をもつ分子構造になっていることが発見された。これは長年の結晶学の法則によると不可能なもののはずであった［注 10］。現在、数学者たちの非周期的な関心は 3 次元へ向かっている。

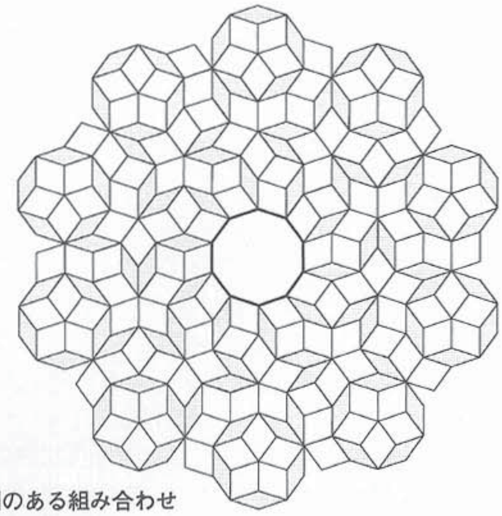


図 8：すき間のある組み合わせ

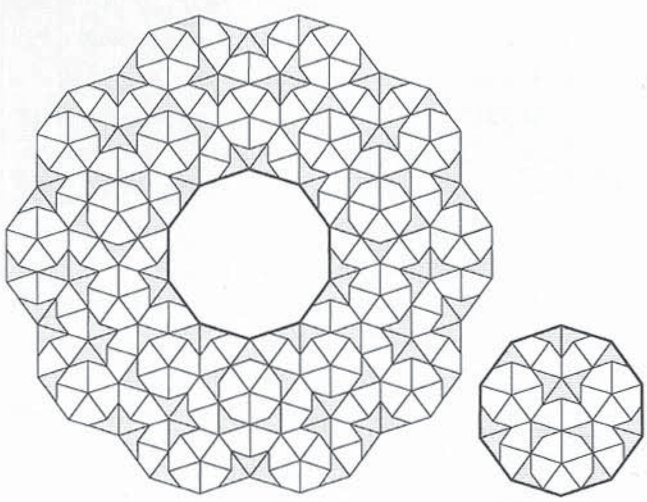
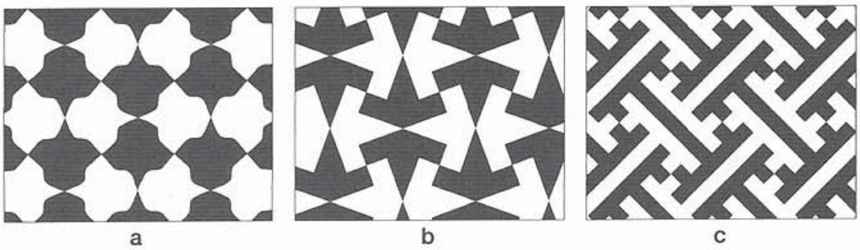


図 9：コンウェイの組み合わせ

図 10



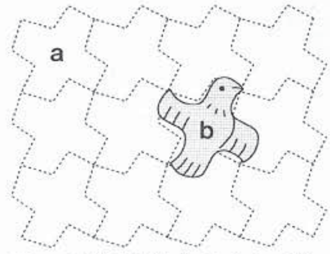


図 11：多角形からのイメージ

2．3．エッシャー・パターン

図 10-a〜c は古くからある模様で、よくみると白い部分と黒い部分のどちらがネガで、どちらがポジなのか判明できない。そればかりではなく、ネガとポジの外観が一致している。このような性質を持つ模様を図地変換模様と呼ぶ［注 11］。図形を描く際、その背景も同時に描かなければならないという図地変換模様の造形上の妙技は古くから人々を魅了してきたばかりでなく、ときには人の生涯に影響をおよぼす力を秘めていた。1955 年に、はじめてアルハンブラ宮殿を訪れたエッシャーは、その宮殿を飾る図地変換模様に魅せられ「それまでに私が発見したもののうちで、これこそが最も豊かなインスピレーションの源泉である」［注 12］ということばどおり、独自の図地変換模様の創作に生涯をついやしたといえる。エッシャーは幾何学的な図地変換模様を鳥や魚などの具象的なモチーフに進展させた。このエッシャー・パターンに関しては、これまで数多くの文献による紹介や検証があり、あらためて説明するまでもないが、本稿では次の 2 点を述べておく。

ひとつはエッシャーと数学との関わりである。数学の世界からアルハンブラ宮殿の装飾模様をみると、群論の一部である対称性の理論という項目に位置する。平面の周期的なパターンに関しては、1891 年、ロシアの結晶学者フェドロフが 2 次元の対称に関する模様には本質的に異なる 17 個の種類があることを証明した。しかし、その 17 種類のパターンはすべてアルハンブラ宮殿に装飾模様に顕在していたという「注 13]。アルハンブラ宮殿が、13〜15 世紀にかけて 21 人のアラブ諸王によって建立されたことを思うと、パターン問題においてデザイン上の智恵の集積が数学より先行していた実例として興味深い。エッシャーは、当時の学術論文より、この 17 種類の対称性を知っていた［注 14］。そればかりでなく、凸多角形による平面充填などの最新知識も取り入れていたことが、エッシャーの残したスケッチでわかる［注 15］。また。数学者コクセターとの交流から双曲空間の図版を得て、創作に役立てていたことも知られている［注 16］。つまり周期的な平面充填において、エッシャーは当時の数学の最新図版をほぼ網羅していたといえる。エッシャー自身、数学についてつぎのようなことばを残している。「私たちを取り巻く謎に鋭く立ち向かうことによって、しかも私の行なった観察を熟考し分析することによって、結局、私は数学の世界に入り込んでいた」［注 17］。しかしエッシャーにとっての数学とは数理の追求ではなく、あくまでも創作のための資料・題材にすぎない。科学と芸術との相互関係において、当時の数学者たちとエッシャーとの交流は、最新の知が最新の表現に結びつくという、まさに理想的な関係にあったといえよう。

つぎに、エッシャーはいかにエッシャー・パターンを作ったかという問題にふれる。幸い、エッシャーは創作にあたり膨大な量のノートおよびスケッチを残しており、手がかりは十分に得ることができる。エッシャーは、アルハンブラの模様のみならず、さまざまな幾何学図形を収集した。そして、それらをもとに何かしらの具象的なかたちをイメージしていく。図 11 を例にすると、エッシャーは多角形 a から鳥のかたちを連想して b を導きだす、というプロセスでかたちづくりをしている。この方法においては、いかにイメージしやすい多角形を得ることができるかが重要なポイントになる。そのためエッシャーは、イメージしやすい多角形を得ることができるまで、もとになるひとつの多角形を他の多角形に変換する作業を数多く試みている。

図 11 のように、スムーズに平面充填できるかたちが得られないときはどうするか。図 12 を例にすると、鳥のかたちをイメージできるが、ひとつの鳥のかたちだけで平面充填させることが難しい場合、エッシャーは図 13 のようにモチーフを複数化することで平面充填を成功させている。図 13 の実線部分をくり返しの単位にする、という方法である。図 14 においては、似て非なる 3 種の鳥の集まりがくり返されているが、これら 3 種の鳥のかたちは合同ではない。平面充填を前提にかたちづくりを実践するとわかることだが、図 13 でいえば、点践部分を考える方が実線部分を考えるより負担が少ない場合が多い。この方法は、

図 12：プロセス 1

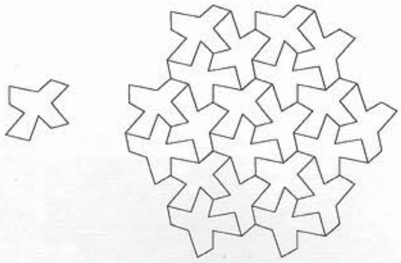


図 13：プロセス 2

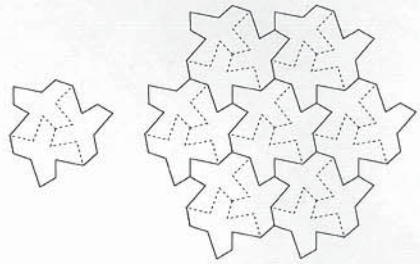


図 14：プロセス 3

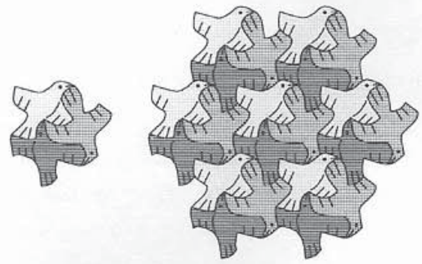


図1：二等辺三角形

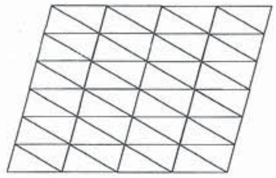


図2：周期的パターン

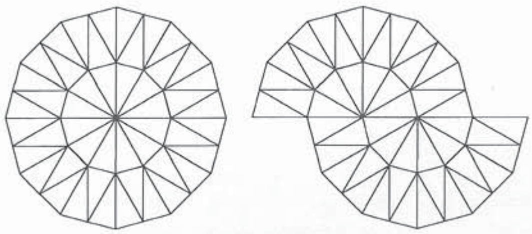


図3：非周期的パターン

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ （黄金分割比）

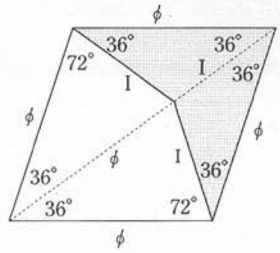


図4：ペンローズ・パターンA

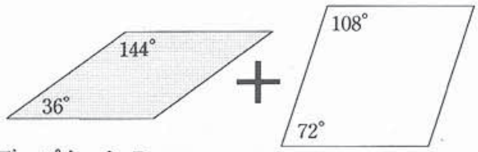


図5：ペンローズ・パターンB

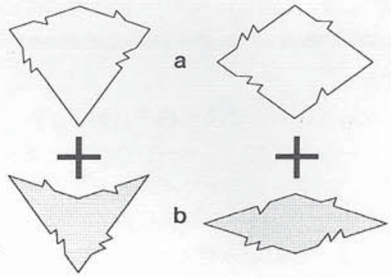


図6：組み合わせの条件

て「この分野で最も刺激的な発展のいくつかは、実に、ここ20数年ぐらいの間に得られたものである」と述べられている[注2]。しかし、短期間ではあるがイスラム文化の幾何学パターンの蓄積を凌駕するめざましい進展がなされている。なかでも非周期的パターンの発見は、数学のみならずデザインの分野でも興味深い課題としてとらえたい。とりわけペンローズが発見したパターン（通称ペンローズ・パターン）は二重の意味で興味深い。ひとつは、最も洗練され、かつ話題を提供した非周期的パターンであること。もうひとつは、ペンローズはエッシャーと交流があり、エッシャーのいくつかの作品にアイデアを提供していたことである［注3］。残念なことに、ペンローズが非周期的パターンを発見したのは、エッシャーが他界した2年後の1974年であった。

本稿では、パターン・デザイン研究の今日的な課題として、エッシャーとペンローズが提示したパターン問題をとりあげる。ペンローズ・パターンを、エッシャーが試みたように鳥や魚などの形状で変換すると、非周期の特性がどのようにみえてくるか。また数学的関心とは別に、デザイン的関心で非周期的パターンを課題にするとしたらどのような方向があるのか。これらを考察することで、パターン・デザインのあらたな可能性を模索することを目的とする。

2．研究の背景

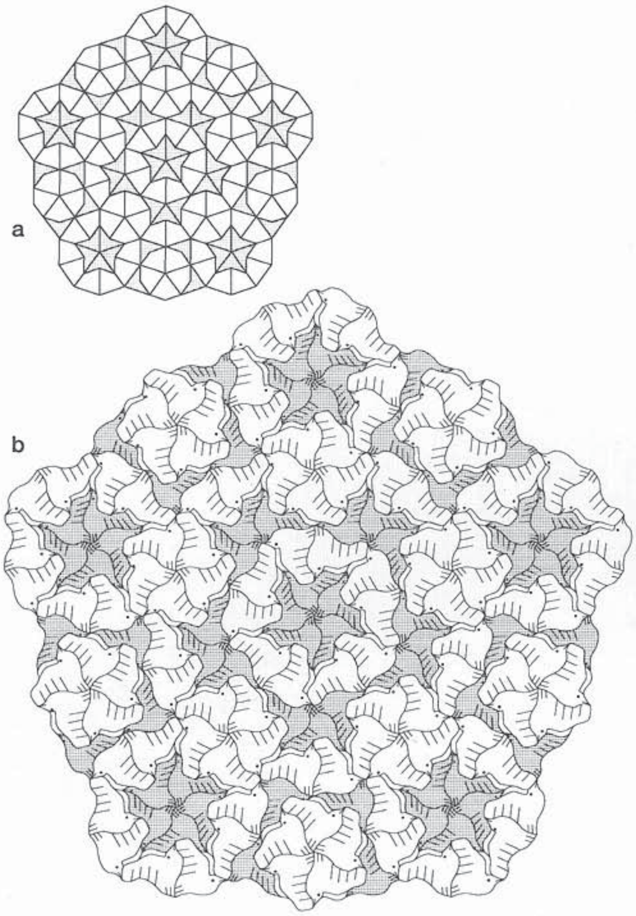
2．1．非周期的パターン

ペンローズの非周期的パターンというときの、この周期および非周期という用語は次のように定義されている。ある領域をとると、それを回転や反転をすることなく平行移動して平面充填できるものが周期的パターンである。つまり平行移動に関する対称性をもつパターンを周期的パターンという。非周期とは、逆に平行移動に関する対称性をもたないパターンのことをいう。そして、無限に多くの形は周期的にのみ平面充填が可能である（たとえば正六角形）。他の無限に多くの形は周期的にも非周期的にも平面充填が可能である。これを放射状に平面充填できる二等辺三角形（図1）を例にとると、図1を周期的に平面充填したものが図2である。また図1は非周期的にも平面充填できる。それが図3である。この例のように、合同な形による非周期的な平面充填はすべての場合において周期的な平面充填が可能である［注4］。それでは、非周期的にのみ平面充填が可能なものが存在するかどうか。当初、そのようなパターンはありえないと予想されていたが、1964年のバーガーの論文以降、ロビンソン、アムマン、ペンローズなどによって次々に非周期パターンの存在があきらかにされた［注5］。とりわけペンローズが発見したパターンは、今なお、多くの研究者たちの関心をひきつけていることから、ペンローズ・パターンという名は非周期的パターンの代名詞となりつつある。

2．2．ペンローズ・パターン

オックスフォード大学の数理物理学者、ロジャー・ペンローズが1972年に発見したパターンは、内角が72度と108度のひし形を図4のように分割したものだ。すべての線分は黄金分割比になっていて、最小の角度は36度、他の角度はすべてその倍数である。この図4を、ここでは仮にペンローズ・パターンAとする。その後、ペンローズは図4に関連する図5のパターンも発表した。こちらは内角が36度と144度のひし形と内角が72度と108度のひし形を組み合わせるものである。図5は、黄金分割比で構成されていることや、最小の角度が36度で、他の角度はすべてその倍数で構成されていることからも、図4の兄弟関係にあるパターンといえる。この図5を、ここでは仮にペンローズ・パターンBとする。ペンローズ・パターンA、Bが非周期的にのみ組み合わされるためには条件が必要である。その条件を満たすひとつのアイデアに図6の凹凸ベクトルがある。

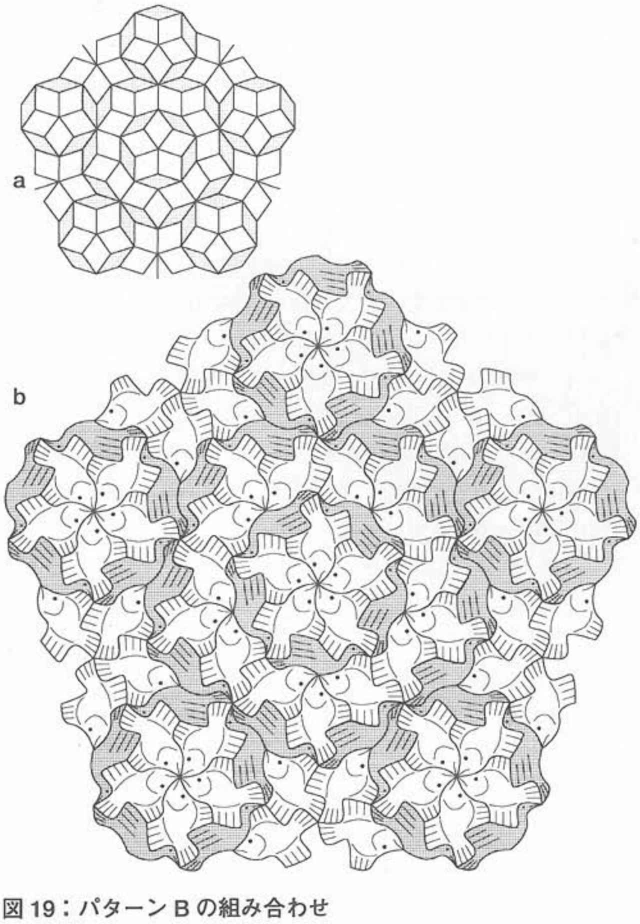
ペンローズ・パターンの一般的な特徴をしめすものとして図7を掲載する。図7のa-1〜4はペンローズ・パターンAで、b-1〜4がペンローズ・パターンBの組み合わせである。図7-a、bともに1、2、3、4…とフラクタル的構造を生成する。そのと



a

b

図 18：パターン A の組み合わせ



a

b

図 19：パターン B の組み合わせ

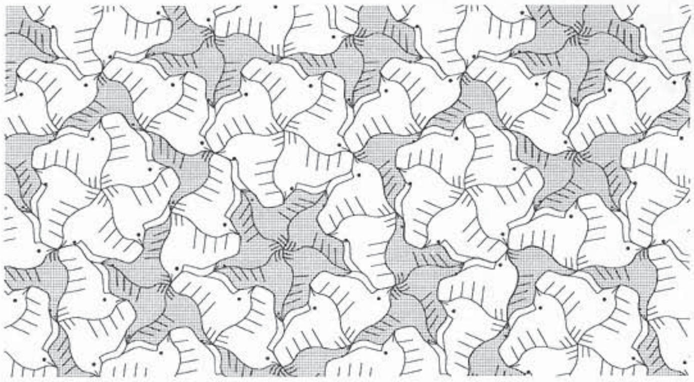


図 20：クローズアップ 1

3．2．ペンローズ+エッシャー・パターン

エッシャーと交流のあったペンローズが，もしもエッシャー存命中に非周期的パターンを発見していたら、このアイデアをエッシャーに伝えたにちがいない。その証拠に、ペンローズ自らペンローズ・パターンを用いてエッシャー風のパターンを、一点、制作している。それは2種のひし形を2羽のニワトリに図形変換させているところから、ペンローズ・チキンという名称で知られている［注 18］。ペンローズはこの一作をして、エッシャーへのレクイエムとしたのかもしれない。ペンローズ+エッシャー・パターンのこころみは、この他に例をみない。

先の図 17-f で得たかたちを組み合わせると、図 18-b, 19-b となる。組み合わせは図 7 と同じものである（図 18-a ＝図 7-a-4, 図 19-a ＝図 7-b-3)。一見、無機的で単調に映る幾何学パターンが、エッシャーの手を介すことで、生き物のようにうごめいてみえてくるのはエッシャー・パターンで経験済みだが、この図 18-b, 19-b にもそれがあてはまる。2種のひし形が絡み合うだけでも充分に興味深かったペンローズ・パターンであるが、そのひし形が鳥や魚などのかたちに化身してすき間なく絡み合うと、さらに驚きが増長される。コンウェイの発見した組み合わせ（図 9）をクローズアップした図 20 においては、この図から背後の仕組を読みとることが困難にもみえてくる。

この視覚がもたらす驚きの差は、どこから生じてくるのか。先の図 4、5 のひし形が図 18-a, 19-a に組み合うためには、組み合わせを限定する条件がなければならない。その条件を満たすアイデアのひとつに凹凸ベクトル図があるが、凹凸ベクトルはあくまでもアイデアであり、通常、表示されない。わたしたちは、ペンローズ・パターンにおいて、背後にある組み合わせの仕方の条件を知って、はじめて非周期的な組み合わせに驚嘆することができる。ところが、図 18-b, 19-b においては組み合わせを限定させる条件が背後に隠されていない。鳥や魚に変換したかたちそのものが、直接、組み合わせを限定させる条件となって露呈している。この違いが、驚きの差の要因として考えられる。パターン問題において、エッシャー・パターンは視覚的な面白さばかりではなく、背後にある幾何学図形の組み合わせの仕方の条件を露呈させていたことが再認識できる。

3．3．ペンローズ・パターン―他の可能性

ペンローズ・パターンの非周期的な組み合わせを限定させるアイデアのひとつに凹凸ベクトル図があり、同じアイデアとし

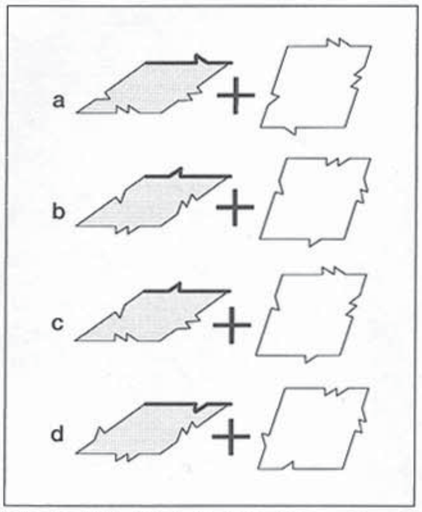


図 21：凹凸ベクトル表記バリエーション

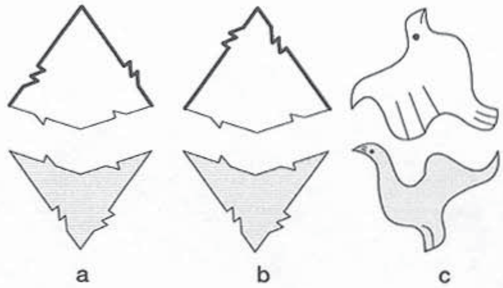


図 22：ペンローズ・パターン C

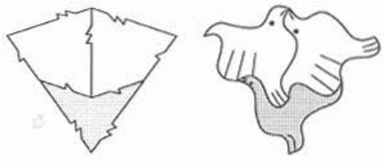


図 23：組み合わせの単位

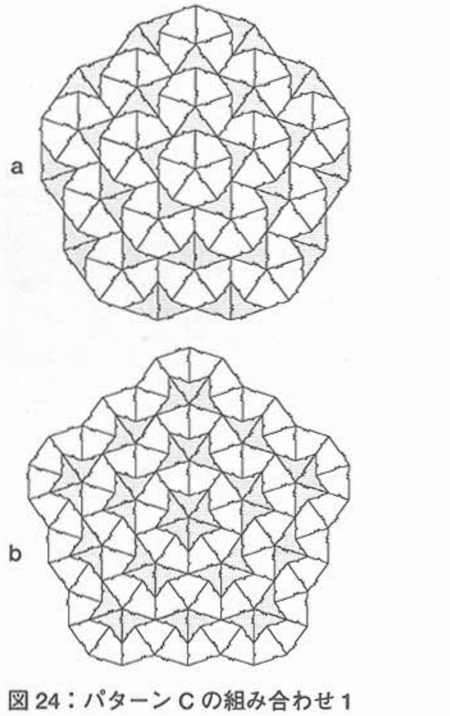


図 24：パターン C の組み合わせ 1

て、ベクトルのかわりに 2 種類の鍵のかたちで凹凸を表記したものがある［注 19］。他のアイデアとしては図 15-a の頂点色別やコンウェイの円弧模様［注 20］などがある。これらのアイデアのなかで、凹凸ベクトル図の有効性を図 16 にしめしたが、問題がないわけではない。この凹凸ベクトル図は、文献によってベクトルの向きや位置が異なるものがあり、戸惑うときがある。図 21-a〜d を例にすると、それぞれのひし形のベクトルの向きや位置が異なるにもかかわらず、いずれも同じ組み合わせを限定させる。この凹凸ベクトル図の違いは、仮に図 21-a の太線部分のベクトル表記を、b、c、d の太線部分のベクトル表記に変更したときに、他辺のベクトル表記もそれぞれ連動して変わるところから生じる差異である。このとき、他辺が連動して変わることなく、一部のベクトル表記のみが変わると、ペンローズが提示した組み合わせとは異なる組み合わせを限定させることになる。図 24-a〜d と同じ組み合わせを限定させる凹凸ベクトル図は、他にも考えられる。このように、ひとつの組み合わせの仕方に対して、見かけ上、複数の凹凸ベクトル図が存在するところが、凹凸ベクトル図の問題点といえる。

では、この凹凸ベクトル図の持つ表記上の問題を利用して、ペンローズ・パターンが提示した組み合わせ条件以外に、意図的に凹凸ベクトルを変更したら、どのような組み合わせが展開されるのだろうか。その結果、興味深い凹凸ベクトルの存在がわかった。図 22-a は図 17-a と同じものであり、図 22-a の一部（太線部分）のベクトル位置を変更したものが図 22-b である。図 22-b は、図 7 と似て非なる図 24-a、b の組み合わせを限定させる。しかし非周期的のみの組み合わせを限定させることに変わりはなく、ペンローズ・パターンのバリエーションといえる。ここでは、図 22-b を仮にペンローズ・パターン C としておく。このペンローズ・パターン C においては、図 7-a にあらわれるペンローズ・パターン特有の局所の 5 回対称性をみることはできない。どの組み合わせも、図 23 の組み合わせを基本に展開される。また、組み合わせたときに図 24 の a と b を融合できないことなどが特徴としてあげられる。図 22-c は、図 17 のパターン生成プロセスにならって得た鳥と動物のかたちで、これらを組み合わせたものが図 25-a、b である。

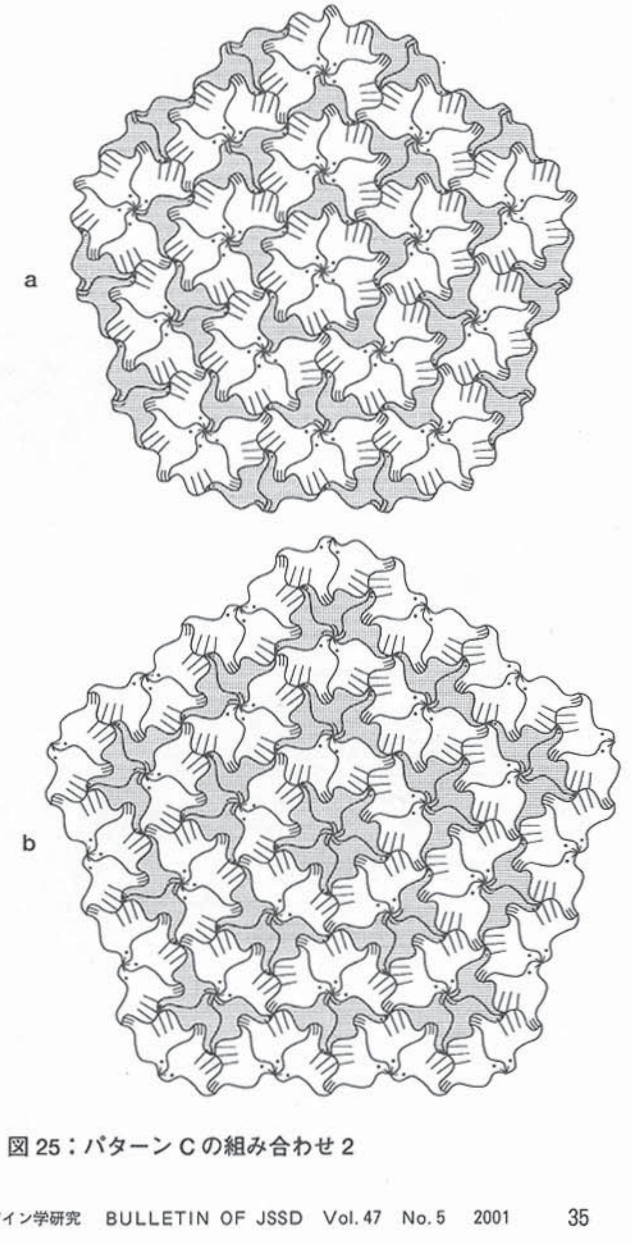


図 25：パターン C の組み合わせ 2

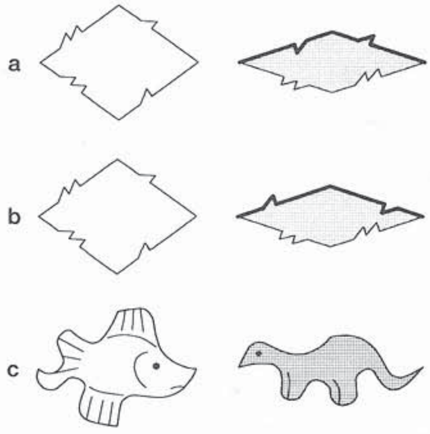


図 26：ペンローズ・パターンD

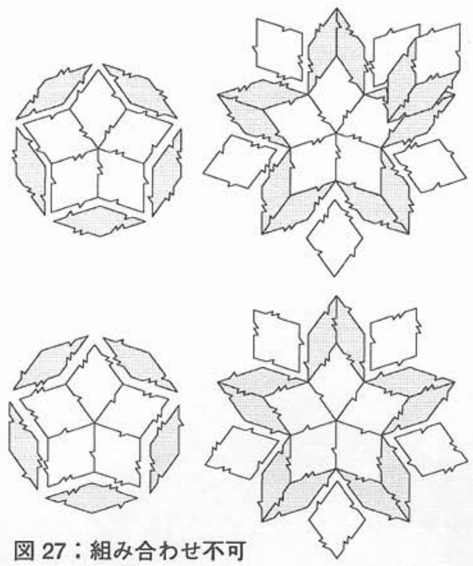


図 27：組み合わせ不可

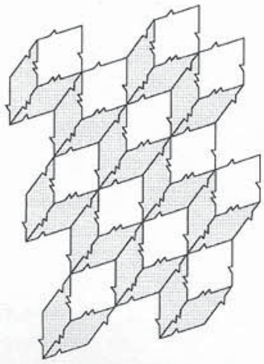
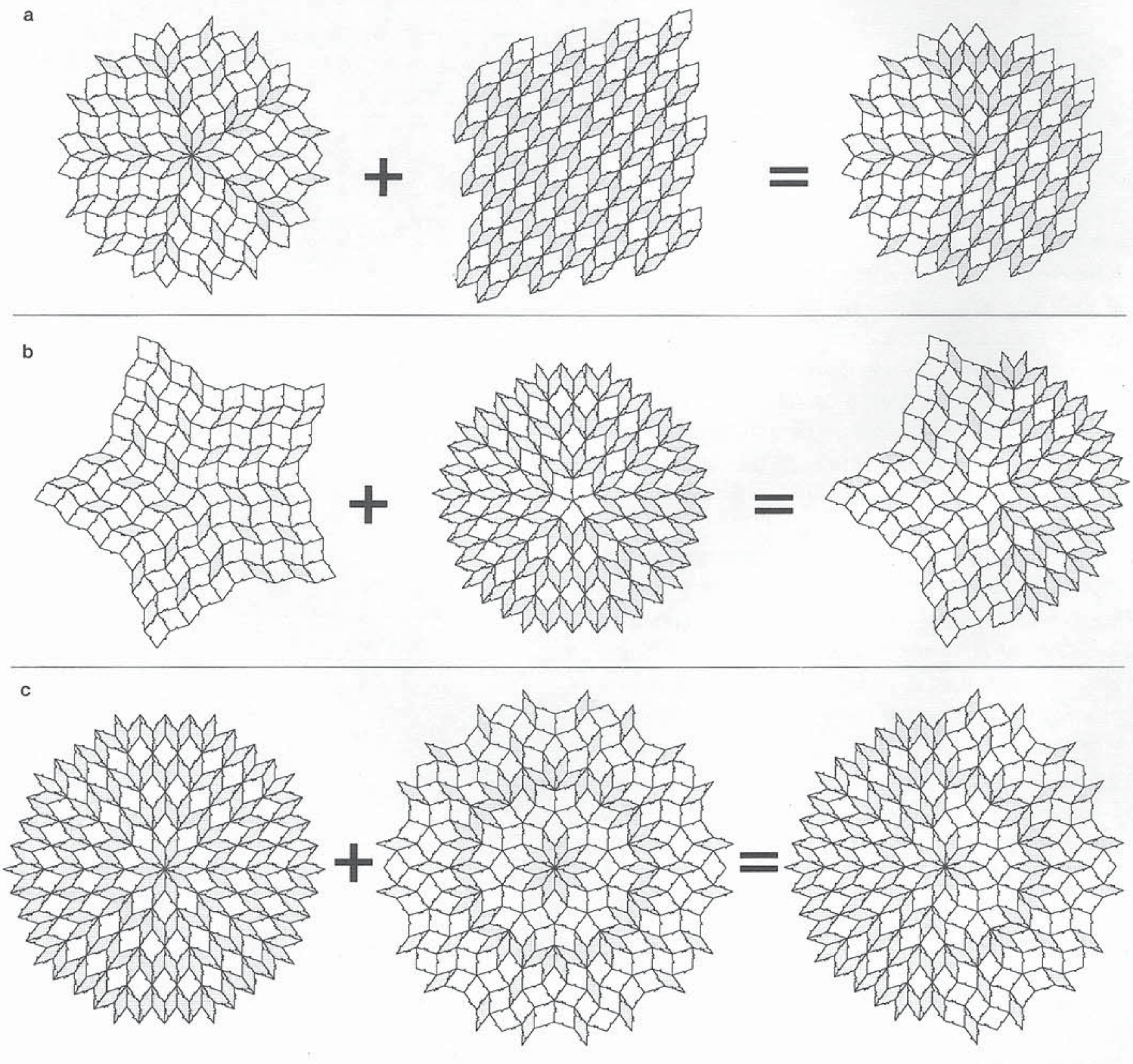


図 28：周期的組み合わせ

図 29：パターンDの組み合わせ



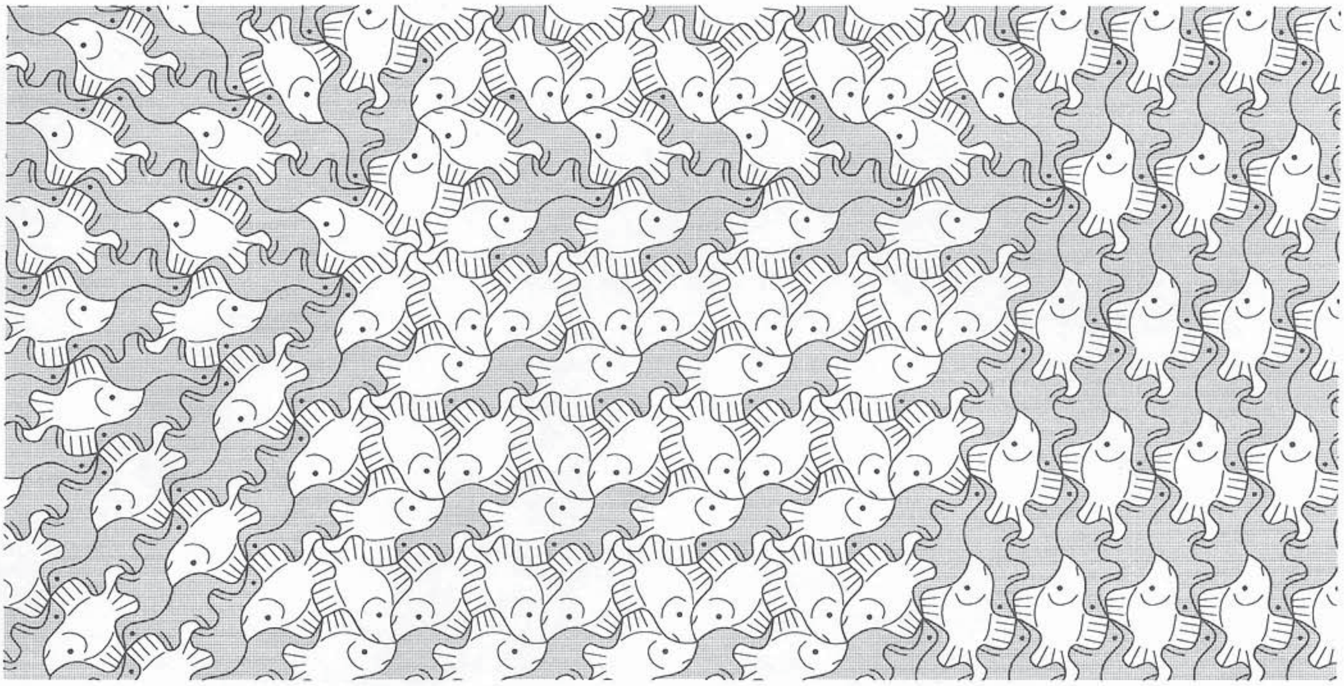


図 30：パターン D の図形変換

図 31：パターン D の組み合わせ 2

つぎに、もうひとつのペンロース・パターンの凹凸ベクトル図をあらためて検証してみると、こちらにも興味深い組み合わせを限定させる凹凸ベクトルの存在がわかった。図 26-a は図 17-a と同じものである。図 26-a のベクトルの一部（太線部分）を変更したものが図 26-b となる。そして図 17 のパターン生成プロセスにならって得たかたちが図 26-c の鳥と動物である。この図 26-b を、ここでは仮にペンローズ・パターン D とする。こちらも図 7-b にみられるペンローズ・パターン特有の局所的な組み合わせができない（図 27）。また、非周期的にのみという組み合わせを限定させることもできない。図 28 では、あきらかに周期的な組み合わせが可能になっている。この時点で，非周期的にのみという数学者たちの関心を満たすものではなくなるのかもしれない。

ところが、パターン・デザインの可能性としてみた場合はどうであろう。このペンローズ・パターン D の凹凸ベクトルが限定させる組み合わせは図 28 にとどまらない。たとえば図 29-a、b、c のような組み合わせが可能となる。これらは、ほんの一例で、組み合わせは他に無数できる。興味深いところは、無数の特徴ある組み合わせができるばかりではなく、それぞれを任意に融合させることが可能になることである。また、周期的な組み合わせと非周期的な組み合わせの融合も可能である（図 29-a）。図 30 は図 31 をもとに、図 26-c の魚と動物のかたちを組み合わせたものである。図 30 では、右の周期的な組み合わせから中間の組み合わせを経て左の放射状の組み合わせに、すき間なく変化していく。ペンローズが提示した組み合わせの限定条件では、このように意図的に組み合わせを操作して楽しむことはできない。図 26-b は、より多様な組み合わせが可能になる、興味深い限定条件とえる。

数学者たちの〈非周期的にのみ〉というこだわりがペンローズ・パターンを産みだした。その恩恵のうえで、さらに〈非周期的にのみ〉を取りはらった結果が図 30 の組み合わせをもたらした。図 29〜31 をみるかぎり、〈非周期的にのみ〉というこだわりが、パターン・デザインにとって必ずしも絶対条件である必要はないことがうかがえる。ペンローズが提示した凹凸ベクトルの一部を変えただけで、このような結果が得られた。ということは、この凹凸ベクトルを利用した図形変換というパターン・デザインの研究課題において、数学者たちとは異なる発見が、この先、無数にあるにちがいない。

4. まとめ

本稿では、パターン・デザインの今日的な課題をさぐる目的から、ペンローズの非周期的パターンおよびエッシャー・パターンを題材としてあつかった。はじめに、誰でもできるエッシャー・パターンの制作方法を提示した。つぎに、その制作方法で得られた鳥や魚のかたちをペンローズ・パターンにあてはめることに成功した。その結果、幾何学図形を具象的モチーフに変換させるエッシャー・パターンの魅力と可能性をあらためて確認することができた。そして、エッシャー・パターンは個人の作品として鑑賞するだけではなく、今後も研究を継承していく価値のあるパターン・デザイン問題であることを確信することができた。また、ペンローズ・パターンに関しては、非周期的な組み合わせの仕方を限定させる凹凸ベクトル図のアイデアにバリエーションがあり、必ずしも〈非周期的にのみ〉という数学者たちの関心を満たさなくても、デザイン上、充分に魅力がある組み合わせができる、あらたな凹凸ベクトル図の存在を提示することができた。

パターン問題に関しては、近年，数学の世界でめざましい研究成果が発表されている。だが、冒頭に揚げた研究者のことばは謙虚だ。「われわれにとって最も大きな驚きは、多分、敷きつめ問題についてあまりにも少しのことしか知らなかったことであった」。ある特定の型がくり返されて使用されるパターンは、数学の問題であると同時にデザインの問題でもある。本稿では、デザインの見地からパターン研究をこころみたが、この数学者のことばの片鱗を確かめることができた。

注

1）Grünbaum / Shephard : TILING AND RATTERNS、FREE-MAN、1987
2）a)、前掲 1)、vii
　(訳文引用)
　b)、アイヴァース・ピーターソン、奥田晃訳：現代数学ミステリーツアー、新曜社、85、1992
3）坂根厳夫：境界線の旅、朝日新聞社、96-98、1984
4）非周期的パターンの定義は以下を引用・要約。
　a)、マーチン・ガードナー、一松信訳：ペンローズ・タイルと数学パズル、丸善、1-5、1992
　b)、ロジャー・ペンローズ、林一訳：皇帝の新しい心、みすず書房、153-155、1994
5）前掲 4-a)、5-8
　前掲 4-b)、155-158
6）前掲 4-a)、8-13
7）前掲 1)、102
8）前掲 4-a)、20
9）アイヴァース・ピーターソン、奥田晃訳：現代数学ワンダーランド、新曜社、306、1990
10）キース・デブリン、山下純一訳：数学・パターンの科学、日経サイエンス社、268-271、1995
11）E. H. ゴンブリッチ、白石和也訳：装飾芸術論、岩崎美術社、175-178、1989
12）スタンリー・ガダー、和田秀之訳：教養のための数学の旅 1、啓学出版、101、1980
13）同上、77
14）ドリス・シャットシュナイダー、梶山泰司訳：エッシャー・変容の芸術、日経サイエンス社、24、1991
15）前掲 12)、29
16）ブルーノ・エルンスト、坂根厳夫訳：エッシャーの宇宙、朝日新聞社、163-166、1983
17）前掲 12)、101
18）前掲 3)、98
19）前掲 9)、301
20）前掲 4-a)、8

図版出典

※以下より引用、編集。

図 2　前掲注 4-a)、3
図 4　前掲注 4-a)、8
図 5　前掲注 1)、101
図 6　前掲注 4-b)、157
図 7　前掲注 1)、544
図 8　前掲注 1)、109
図 9　前掲注 4-a)、18
図 10　M.C. エッシャー、坂根厳夫訳：無限を求めて、朝日新聞社、43、1994
図 11-b　藤田伸：連続模様の不思議、岩崎美術社、32、1998
図 12、13　同上、49-50
図 17-f　同上、60-61
図 23-c　同上、60
図 26-c　同上、61