■解説（VISION Vol. 20, No. 1, 9–16, 2008）

エッシャー・パターンとペンローズ・パターンのメカニズムとデザイン

藤田　伸

有限会社 リピートアート
〒152–0033 東京都目黒区大岡山 2–8–1–107

1. はじめに

錯視効果を題材にした画家が多くいるなか，しきつめ図形を正面から取り扱ったという点においてエッシャーは特異な存在である．また装飾デザイン史上においても，数々のしきつめ図形が編み出されてきたが，鳥や魚や人などの具象的なシルエットによるしきつめ図形を執拗に試みた例はエッシャーの他に見あたらない．ゆえに，それら一連のしきつめ図形はエッシャー・パターンと称されている．

このエッシャーが先駆けたパターンの世界を，今後も継承発展すべきデザイン・パターン課題と受け止めるためには，まずはメカニズムを解明しなければならない．エッシャーは創作にあたり膨大なスケッチを残しており，しきつめに関する覚え書きも相当数含まれている．しかしメカニズム解明のためのよりよい手掛かりは，ペンローズが発表した非周期的パターン（以下ペンローズ．パターンと称する）から得ることができた．そのためエッシャー・パターン解明は同時にペンローズ・パターン解明につながることとなった．なお本稿でいうメカニズム解明とは，デザイナーがパターン・デザイングにあたり有益な方法論を確立させるという意味で用いている．

以上，本稿はペンローズが非周期的パターンを提示する際に用いたマッチングルールを手掛かりにエッシャー・パターンのメカニズム解明に至ったこれまでの研究報告[1–4]に加えて，新たな展開図例を開示するものである．

2. マッチングルールの確立

ペンローズはエッシャーと交流があり，「ペンローズの三角形」をはじめとする錯視図形のアイデアをエッシャーに提供した数学者として知られているが，エッシャー没後に非周期的（平行移動に関する対称性をもたない）パターンを2種発表した[5]．

そのうちのひとつが，鋭角72°と36°のひし形を組み合わせるものである．しかし組み合わせ条件を設定しない限り，これらは周期的にも組み合う（図1-a）．そのため，ペンローズは非周期的のみに組み合う条件を凹凸のベクトル記号を用いて提示した（図1-b）．

この凹凸のベクトル記号は，ただ組み合わせ

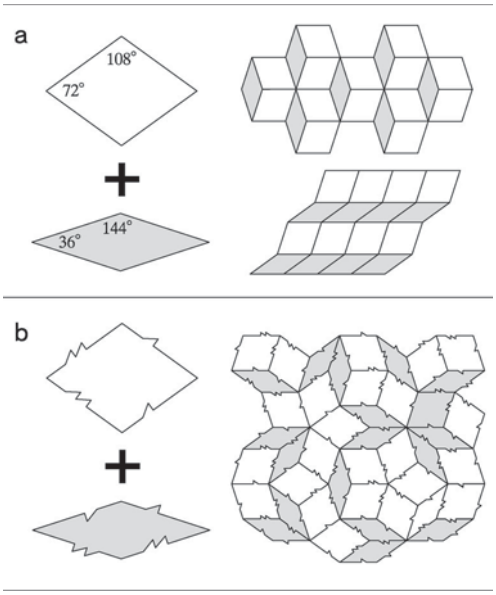

図1　ペンローズ・パターンと条件．

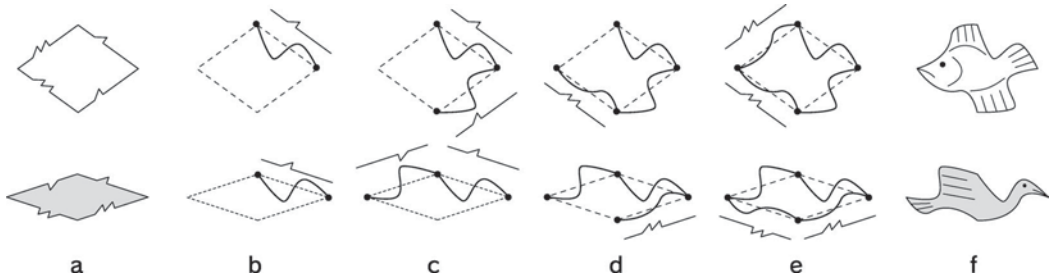

図2　図形変換のプロセス.

を強制させるばかりでなく，エッシャー・パターンのように鳥や魚などの図形に変換させる際のガイドとしても役割をはたす.

ペンローズが提示した**図2**–a をもとに，四角形のなかの一辺の頂点間を結ぶ任意の線を用意して一重ベクトルと同じ角度・同じ凹凸に複製移動させると図 2-b, c となる．ペンローズが提示した図 2-a においては，一重ベクトルと二重ベクトルという 2 種の表記が用いられており，これは 2 種の線を用いると解釈できる．したがって図 2-d, e においては図 2-b, c とは異なる線でなければならない．そこで残りの各辺に対しても，頂点間を結ぶ他の任意の線を用意して，二重ベクトルと同じ角度・同じ凹凸に複製移動させる（図 2-d, e）．このプロセスによって，図 2-f のしきつめ可能な鳥と魚が得られた．思うようなかたちが得られない場合は，任意の線をそれぞれ描き直して同じ操作をくり返していけばよい.

エッシャーの場合は，残されたスケッチをみる限り，しきつめ可能なさまざまな多角形を下図にして修正をかさねていく手法を主に用いている[6–7]．それに比べて，ペンローズが提示した図 2-a の凹凸ベクトルは，この記号自体がすでに図形変換をあらわしており，第三者にも共有できるマッチングルールとして適している．このベクトル表記では，矢印の方向や凹凸によって並進，回転，鏡映，すべり鏡映の移動が識別できる．**図3**-a を例にすると，図 3-b が回転，図 3-c が鏡映，図 3-d がすべり鏡映となる.

さて，ペンローズが提示した図 2-a を手掛かりに，しきつめ可能な多角形のマッチングルールを探る際，ベースとなる多角形の一辺に対して，図 3 の 4 種のベクトルの組み合わせを検討しなければならない．条件としては，1．ベクトルの凹凸が必ずペアで存在すること．2．表記上は異なっていても出来上がるかたちが重複しないことである．**図4**は，図 3-a ～ d の線をベクトルに対応させたものだが，ベクトルの表記は異なっていても同じかたちが出来上がっていることがわかる．上記 2 の条件とは，このような重複を差し引いていくことである.

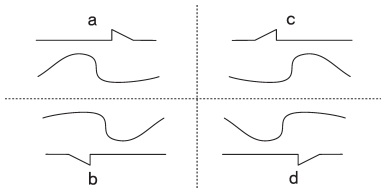

図3　移動の識別.

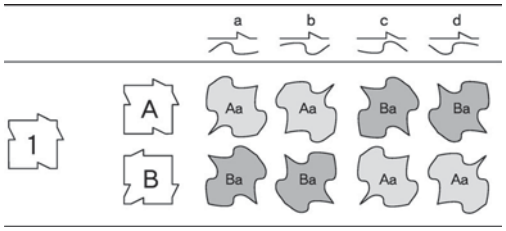

図4　図形の重複.

エッシャー・パターンの背後には必ずしきつめ可能な基本形が存在する．本稿では，しきつめ可能な正多角形として正方形，正三角形，正六角形，ひし形，任意の平行四辺形・長方形，直角二等辺三角形，さらに条件付きの五角形の

マッチングルールを探った結果として図３を載せる．一重ベクトルのみでマッチングルールが成立するのは正方形，ひし形，正六角形である．これらは，鏡映・回転・すべり鏡映がおりこまれたしきつめを楽しめるが，１種の線しか使えないので図形変換は大きく制約される．それに対して他のマッチングルールは，２種以上の線が使える分，図形変換には適していると言えよう．なお五角形に関しては，エッシャーが好んだ図３以外にも，しきつめ可能なものが近年いくつか報告されており[8]，意図する図形によっては選択もありうる．

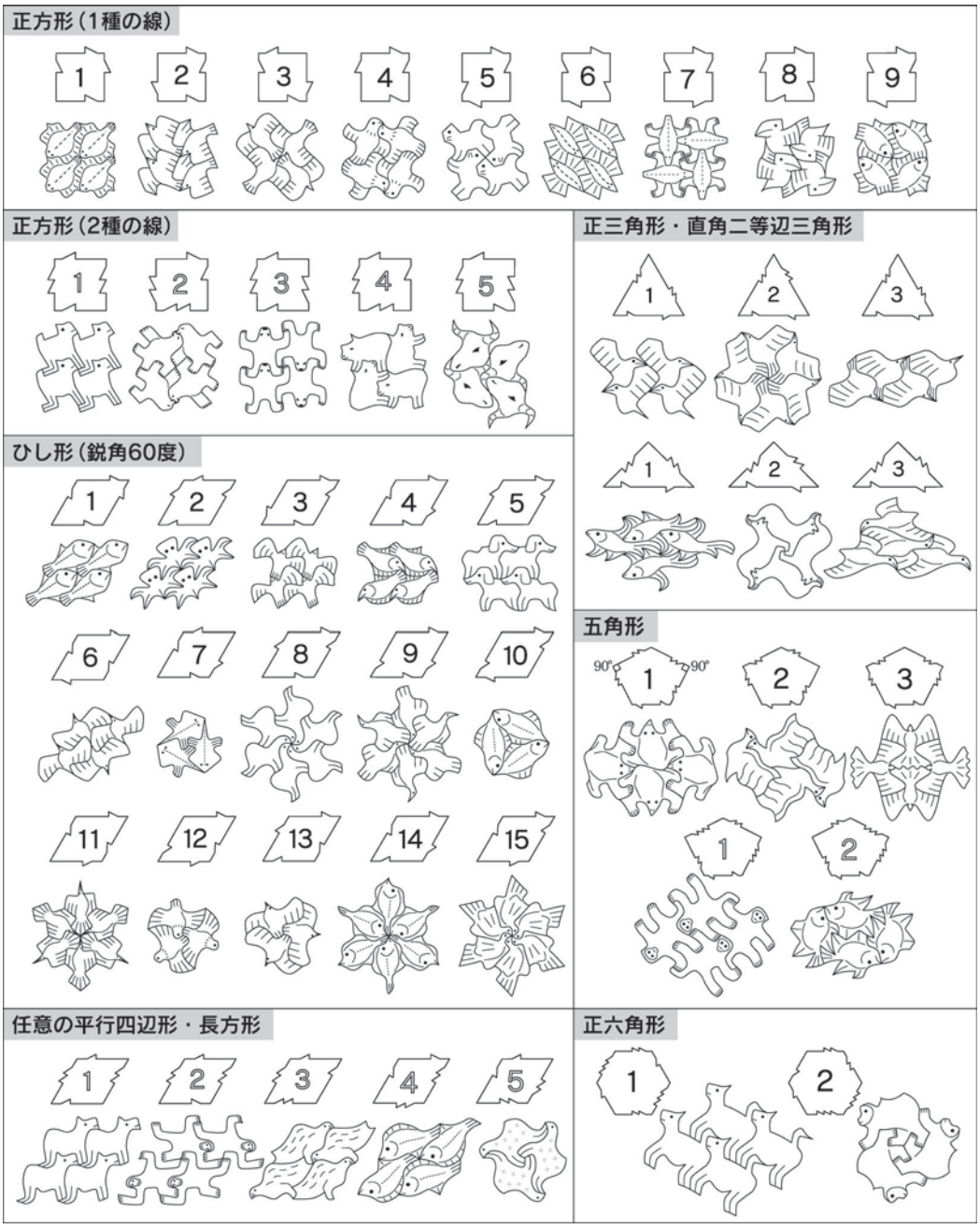

図５　マッチング・ルールおよび図形変換例.

3. エッシャー・パターンの実践

図３のマッチングルールの実践例として，方位や暦などで馴染み深い十二支動物のしきつめを**図６**にあらわす．

まずは，それぞれの動物のシルエットに図形変換しやすい多角形を選びだすことがポイントになる．その際，過去にエッシャーがあわらしたものや図５の図形変換例がヒントを与えてくれる．午（うま）や甲（さる），戌（いぬ）などはすでに**図５**の図形変換例にあるので，それらに修正を施していけばよい．動物図形のしきつめを探る際，シルエットにあまり凹凸がない動物は手掛かりを得るのが難しい．十二支でいえば巳（へび），未（ひつじ），亥（いのしし），丑（うし）などがその類いである．ただ，亥（いのしし）や丑（うし）については図５の正方形（2 種の線）の４番のシルエットに手を加えていくことで解決できた．

問題は，過去に図例がみあたらない動物のしきつめである．過去にあらわされた動物のしきつめ図例は，当然のことながら，しきつめしやすい動物が選ばれており，図例のない動物はその分しきつめが難しいことが予想できる．図５の図形変換例は，いずれも各辺の頂点に単体のシルエットがピタリと重なったものばかりであ

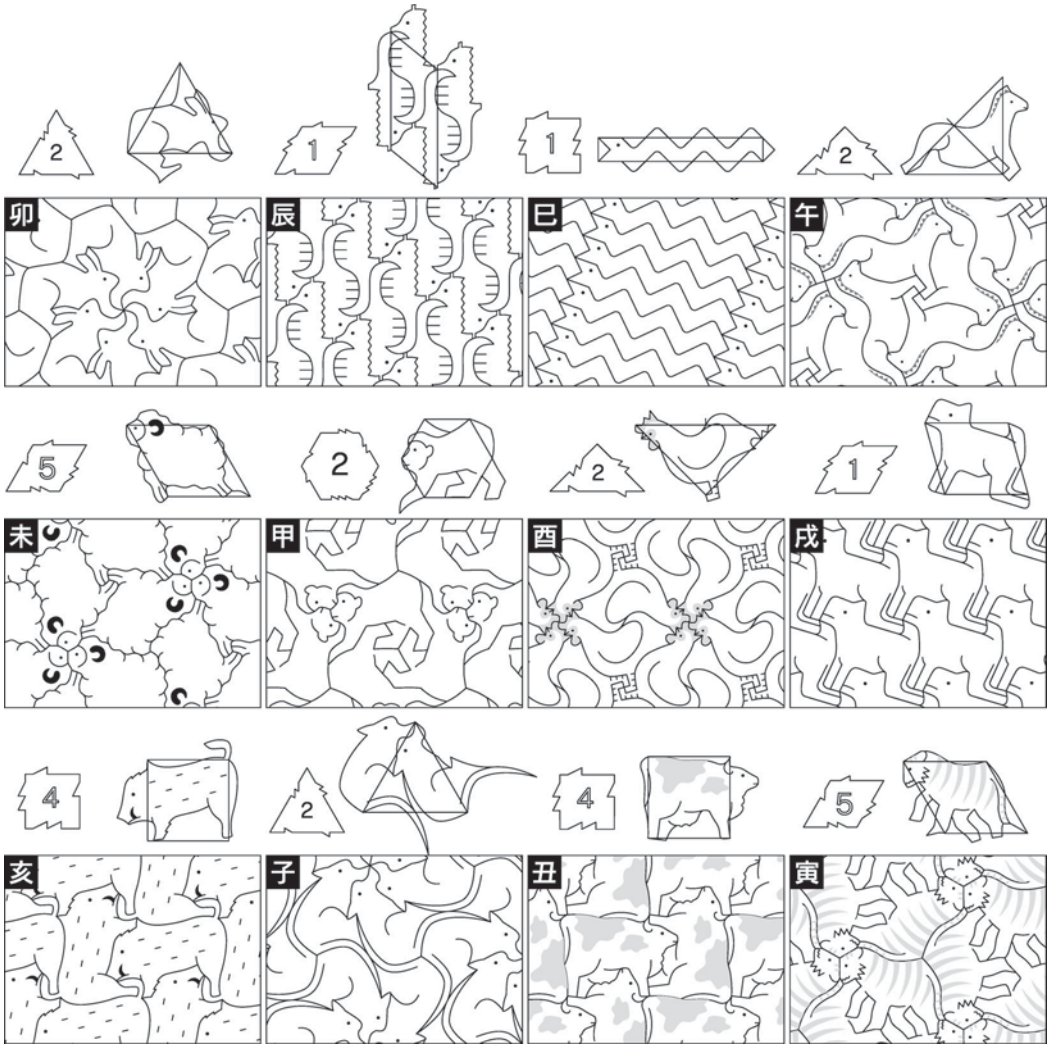

図６　十二支動物の図形変換例-1.

るが，図5の卯（うさぎ）や未（ひつじ），子（ねずみ）などは，必ずしも各辺の頂点に単体のシルエットが重なっていない．思うようなかたちが得られない場合は，単体のシルエットを各辺の頂点から一部ずらしていくことで解決できるときがある．また図6の辰（たつ）では単体ではなく複合体を1単位にすることでしきつめを解決をしている．エッシャーもこの方法をよく用いている[5,6]．これらの解決策はかたち作りの上での実践テクニックといえる．

次に，十二支に登場するすべての動物を1単位にした場合のしきつめ図例を**図7**にあらわす．以前に保育園舎の記念プレートとして，園児のクラスをあらわす6種類の動物によるしきつめデザインをおさめた際，図5の正六角形の2番のマッチングルールが多種複合体のしきつめに都合がよいこと，距離が長く凹凸の少ない箇所から作図を進めていくと最終的なつじつまをあわせやすいことなどを作業経験のなかで得ることができた（**図8**）．そのため十二支においては，動物の数が6種から倍の12種に増えたが，同じ手順で解決できた．

4. ペンローズ・パターンのデザイン展開

ペンローズが提示したマッチングルールをもとに図形変換し（図2），組み合わせた結果が**図9**である．ペンローズはエッシャーと交流があったので，もしもエッシャー存命中にこのペンローズパターンを発表していたら，エッシャーは作品に結びつけたに違いなかったことが惜しまれる．そのためかペンローズ自身，自らのパターンをにわとりの図形に変換させたもの（ペンローズ・チキン）をあらわしている[9]．

ペンローズは非周期的にのみ組み合うために図9のマッチングルールを提示したが，この鋭角36°と72°のひし形に関するマッチングルールは他にも存在する．たとえば**図10**はマッチングルールを一部変更（図9-aと図9-bの太線部分）したものであるが，それだけで変換される図形も，組み合わせも異なったものになる．図10は周期的な組み合わせも可能であることから，非周期的にのみという数学上の関心を満たすことはできない．しかし周期的な組み合わせと非周期的な組み合わせをさまざまに混在さ

図7　十二支動物の図形変換例-2.

図 8　保育園舎記念プレート.

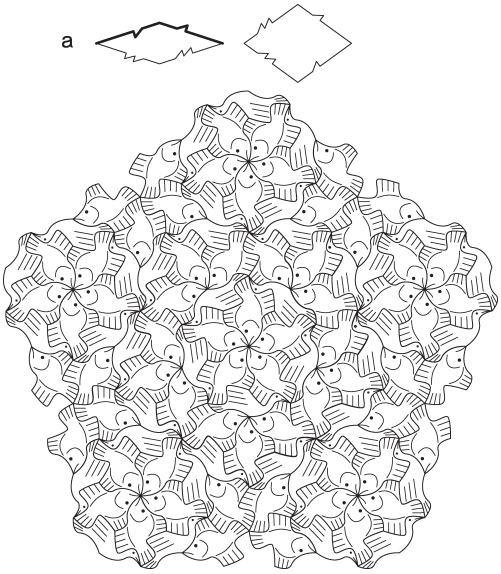

図 9　ペンローズ・パターンの図形変換例.

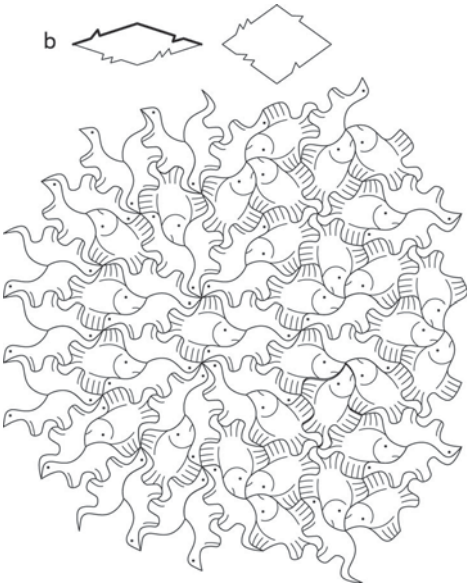

図 10　バリエーション 1.

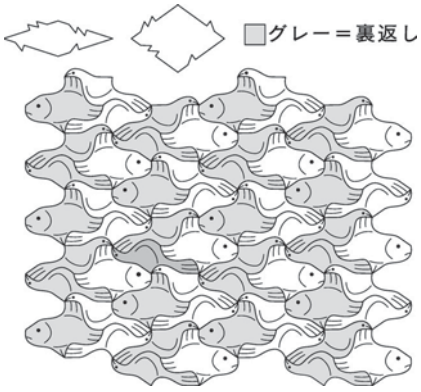

図 11　バリエーション 2.

せることができるので，デザインとしてはむしろこちらの方が興味深いかもしれない.

ペンローズが提示したマッチングルールでは，組み合わせにあたり裏返しなしとなっているが，

裏返しありでマッチングルールを探ると，裏返しなしではみられなかった組み合わせが可能になる（たとえば図 11）．また，裏返しありでもペンローズ・パターンと同じ組み合わせ結果が得られるマッチングルールが確認できていることから[10]，ペンローズはマッチングルールを提示する際，非周期的に組み合う条件のみに関心をしめし，他のマッチングルールについては

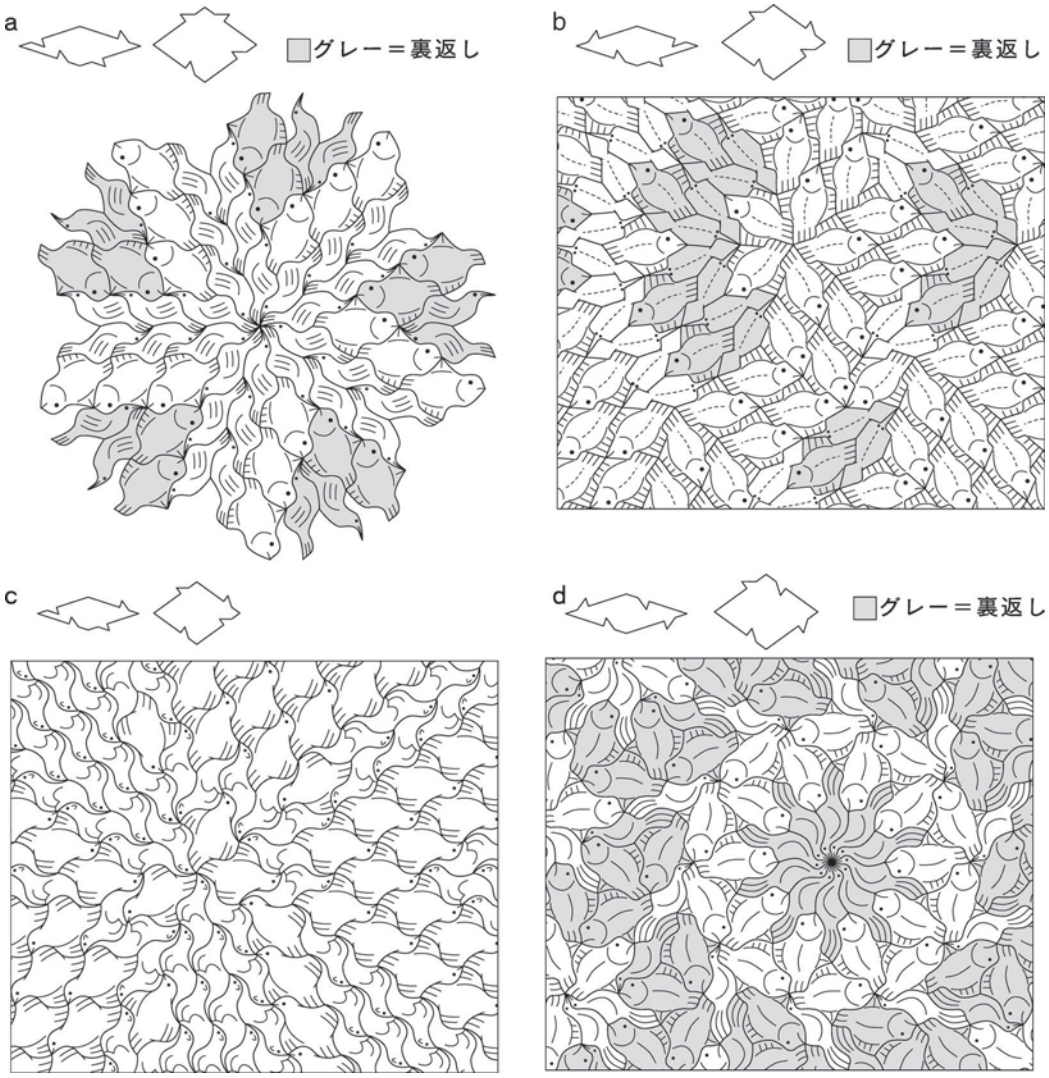

図 12　さまざまなマッチングルールと図形変換例.

興味の対象とはならなかったことが推察される.

ペンローズのマッチングルールは 2 種のベクトル表記（=2 種の線が用いられる）+ 裏返しなしであったが，それを 1 種のベクトル表記（=1 種の線が用いられる）+ 裏返しありでマッチングルールを探ると，どのような組み合わせ結果を得ることができるだろうか．その一例を**図 12** にしめす．図 12-a, b, c は図 10 と同様に，周期的な組み合わせと非周期的な組み合わせをさまざまに混在させることができる．特に図 12-b，c は図 10 よりもさらに柔軟な組み合わせが可能となる注目すべきマッチングルールといえる．この条件下では図形変換にあたり 1 種の線しか用いることができない．1 種の線のみで，ふたつのひし形をそれぞれ満足できる図形に変換させることは難しいが，図 12-b, c のマッチングルールは特に図形変換が難しい．そのため図例では満足な結果が提示できなかった.

図 12-d は周期的な組み合わせはできない．現在 180 ピースまでの組み合わせを確認しているが，この先拡張できればペンローズ・パターンとは似て非なる非周期的組み合わせとなる可能

性を秘めている．図 12-a, d 以外にも，この 1 種のベクトル表記（=1 種の線が用いられる）＋裏返しありのマッチングルールは興味深い組み合わせを多数みせてくれる．

5. ま と め

ある特定のかたちがくり返されるパターンについて，意匠やそれを産み出す仕組みという点ではデザインの課題であるに違いないが，同時に対称という数学の課題でもある．対称に関する知を集大成した『TILINGS AND PATTERNS』のなかで，著者である数学者は「われわれにとって最も大きな驚きは，多分，敷きつめ問題についてあまりにも少しのことしか知らなかったことであった」，そして「この分野で最も刺激的な発展のいくつかは，実に，ここ 20 数年ぐらいの間に得られたものである」と述べているが [11]，その最も刺激的な発展こそペンローズ・パターンに他ならない．

デザインの世界においては，装飾に対する関心が高かった 19 世紀後半~20 世紀前半にかけてパターン研究がさかんにおこなわれていた．しかし装飾の否定からモダンデザインのムーブメントがおこり，以後，関連する研究は途絶えてしまった [12]．ところが今日，エッシャー・パターンおよびペンローズ・パターンという刺激的なテーマを得ることができた．それらをデザイン課題として継承発展させていくためにも．本稿がささやかな貢献となることを願いたい．

ペンローズは鋭角 36° と 72° のひし形をペアに選んだが，他の角度でも，しきつめが可能になるひし形のペアは存在する．それらの図形のマッチングルールを探ることが今後の課題であり，その先に未知の組み合わせがあらわれるかもしれない．

文　　献

1) 藤田　伸：連続模様の不思議―タイリング＆リピート．岩崎美術社，1998.
2) 藤田　伸：ペンローズの非周期的パターンとエッシャー・パターンに関する考察．*デザイン学研究*，47 (5), 29–38, 2001.
3) 藤田　伸：ペンローズ・パターンを題材にしたデザイン・パターン研究(I)．*デザイン学研究*，51 (5), 17–26, 2005.
4) 藤田　伸：ペンローズ・パターンを題材にしたデザイン・パターン研究(II)．*デザイン学研究*，51 (5), 27-36, 2005.
5) ロジャー・ペンローズ（著），林　一（訳）：皇帝の新しい心．みすず書房，157，1994.
6) ドリス・シャットシュナイダー（著），梶川泰司（訳）：エッシャー・変容の芸術―シンメトリーの発見．日経サイエンス社，1991.
7) 日本 M.C.エッシャー著作権委員会（編）：甲賀正治コレクション： M.C.エッシャー-4．1986.
8) T. Sugimoto and T. Ogawa: Systematic study of convex pentagonal tillings, I: Case of convex pentagons with four equal-length edge. *Forma*，20，1–18，2005.
9) Grünbaum and Shephard: Tilings and Patterns. Freeman, 540，1986.
10) 文献 1, p.23
11) アイヴァース・パターソン（著），奥田　晃（訳）：現代数学ミステリーツアー．新曜社，85，1992.
12) 藤田　伸：17 種のウォールペーパー・パターンについての市場における調査報告．*デザイン学研究*，53 (3), 21–30, 2006.